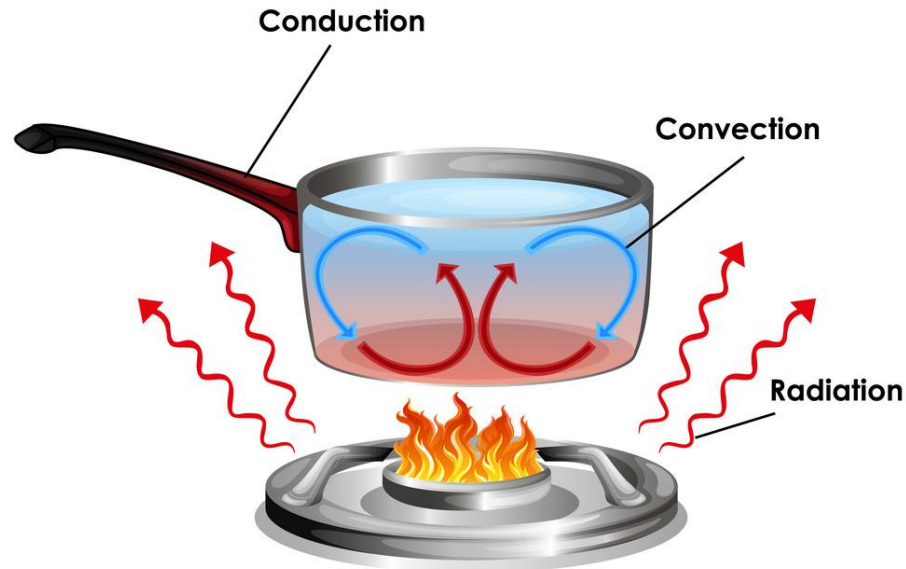


Chapitre 2 : notions de transfert thermique



ANF CNRS – École de mécanique « *Refroidissement des expériences : conception et instrumentation* »
Centre Paul-Langevin à Aussois, 21 au 25 septembre 2020

Eric CONTE (IPHC / UHA)

1. Généralités sur les transferts thermiques
 2. Conduction
 3. Convection
4. Application aux échangeurs de chaleur
 5. Rayonnement

1. Généralités

1. Généralités

Rappel de thermodynamique :

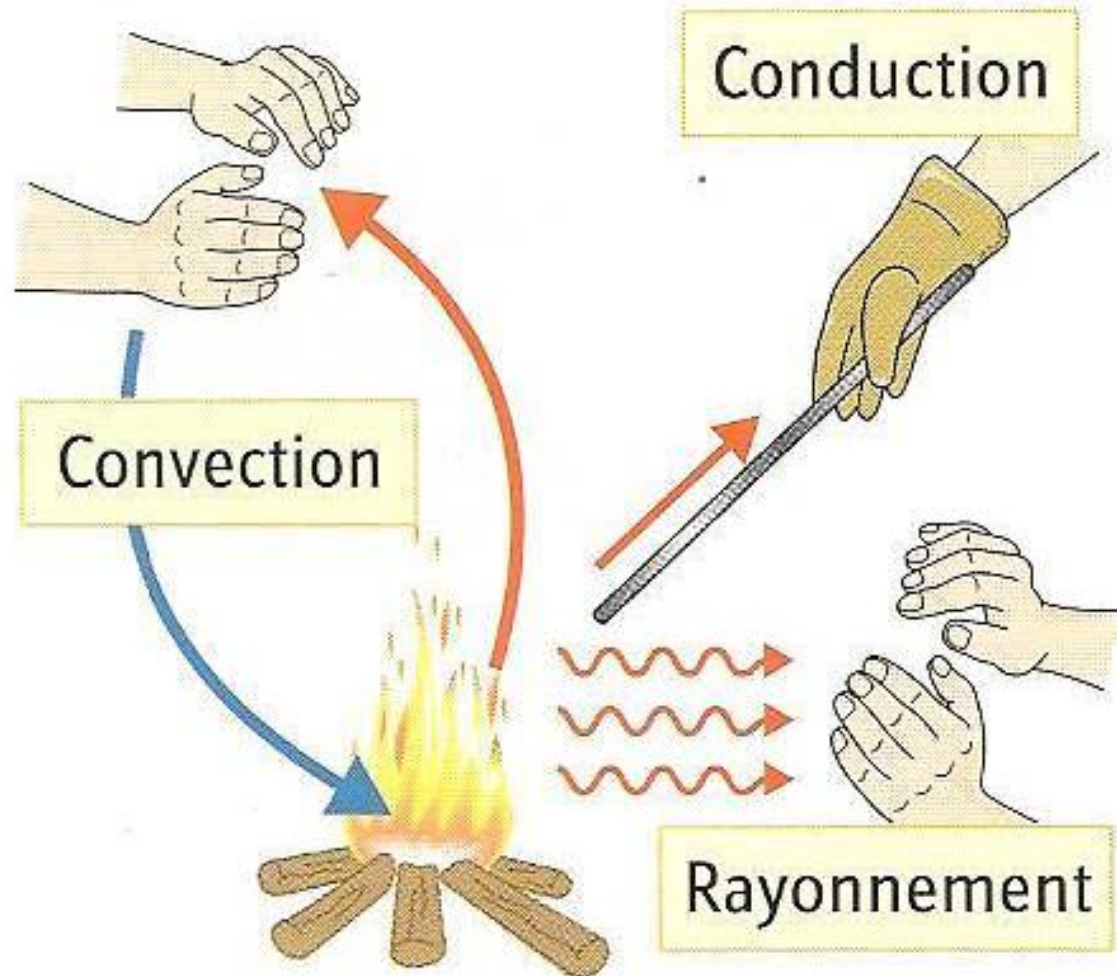
2 types d'échanges d'énergie entre un système et l'extérieur

- W le travail
- Q la chaleur ou transfert thermique

2^{ème} principe de la thermodynamique : la chaleur Q se propage naturellement du corps le + chaud vers le corps le + froid.

3 types de transferts thermiques

- La conduction (thermique)
- La convection (thermique)
- Le rayonnement (thermique)



3 types de transfert thermiques :

Etat de la matière
concerné

Conduction

Transmission de proche en proche de l'agitation thermique.

L+G+S

Convection

La chaleur est réalisée par déplacement macroscopique de matière (combinaison advection et diffusion)

L+G

Rayonnement

Rayonnement électromagnétique généré par l'excitation des électrons dans les atomes constituant la matière.
Tout corps à $T > 0$ K rayonne.

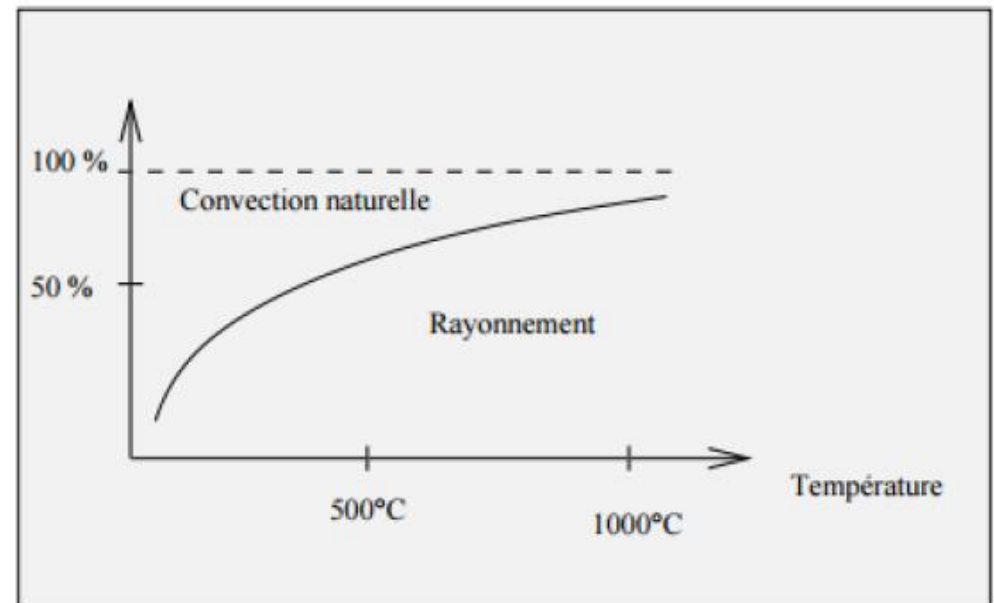
L+G+S

Combinaison de types de transferts thermiques

- En théorie, il est rare d'avoir un seul mode de transfert thermique qui se manifeste.
- En pratique, on a 2 cas de figures :
 - Un mode de transfert thermique est prédominant par rapport aux autres.
 - Une combinaison de modes.

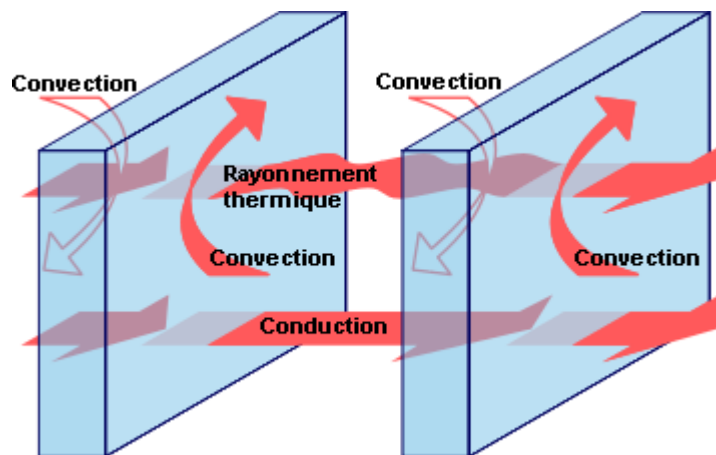
Exemple :

Dans le domaine des basses températures, la convection et la conduction ont une contribution importante. Le rayonnement devient prépondérant aux températures supérieures à 400°C.

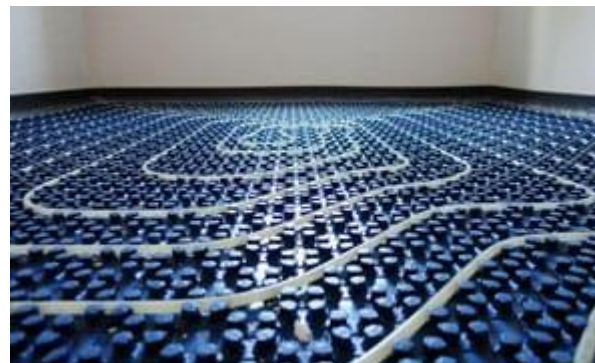


1. Généralités

Exemple de transferts thermiques



Double vitrage à verre clair



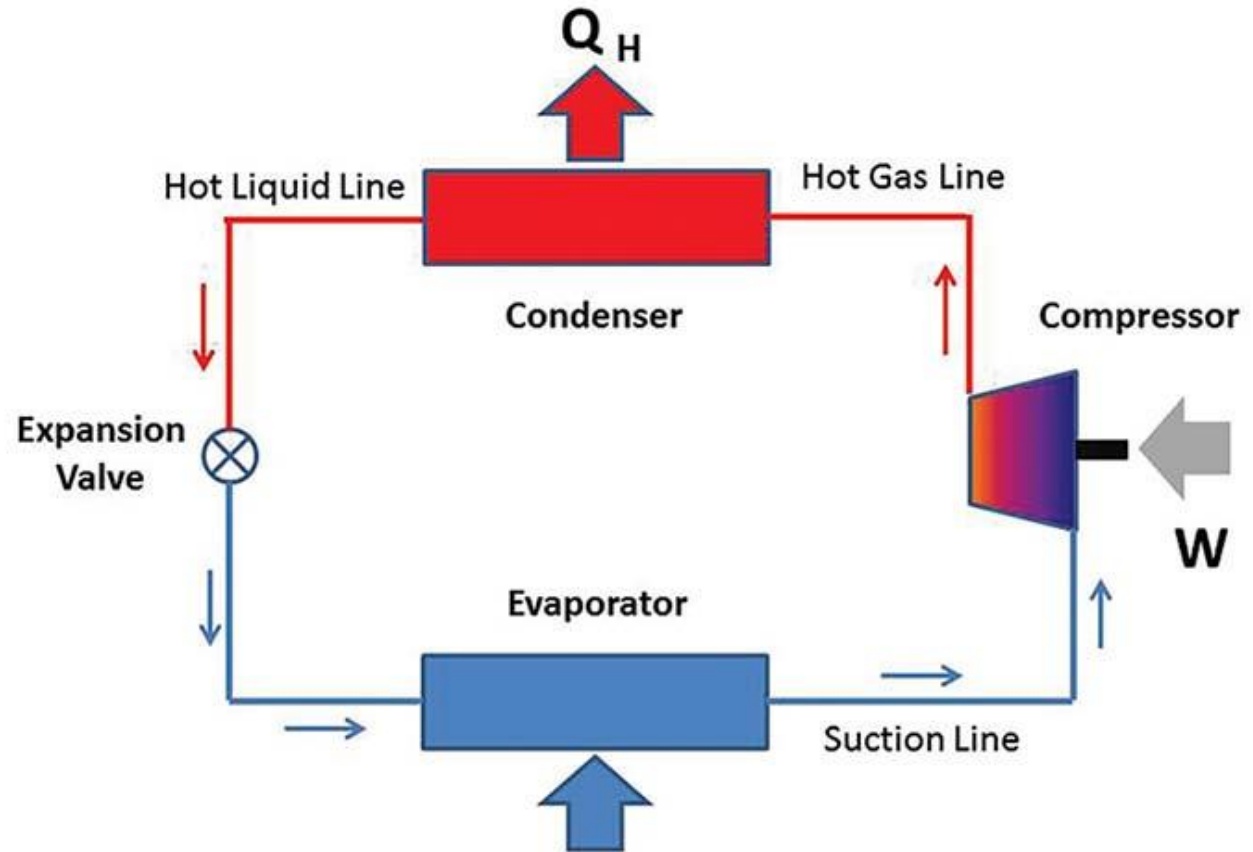
Plancher chauffant



Transfert thermique
reçu par un
astronaute dans
l'espace

1. Généralités

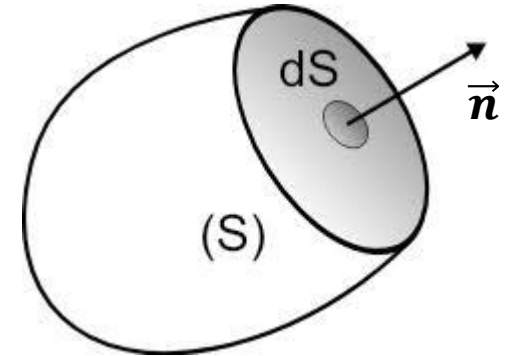
Où sont les transferts thermiques dans une machine frigorifique « classique » ?



Outil mathématique : le flux

- **Notion de surface orientée**

- Hypothèse d'une surface fermée (délimitant un volume)
- Orientation choisie : le vecteur \vec{n} est orthogonale à la surface en tout point et orientée de l'intérieur vers l'extérieur du corps.



- **Notion de flux thermique Φ (en W) à travers une surface orientée S**

$$\Phi = \text{puissance thermique} = \frac{\delta Q}{dt}$$

- **Notion de densité de flux thermique $\vec{\phi}$ (en W.m⁻²) à travers une surface orientée S**

$$\vec{\phi} = \text{densité de puissance thermique} \quad \Phi = \iint_S \vec{\phi} \cdot \vec{n} dS$$



Convention de signe pour Φ opposée à celle de la thermo. Ici l'énergie qui entre dans le volume est comptée négativement.

1. Généralités



Les questions posées :

- Comment calculer le flux à travers une surface ?
- De quel paramètres dépendent ce flux ?

→ Cela dépend du mode de transfert thermique

2. Conduction

Loi de Fourier (1807)

$$\vec{\phi}(M, t) = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}T(M, t)$$



- Avec λ la **conductivité thermique du matériau** (en $\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$)
- **Formulation du gradient dans différents systèmes de coordonnées :**

- Cartésiennes : $\overrightarrow{\text{grad}} f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$
- Cylindriques : $\overrightarrow{\text{grad}} f(r, \theta, z) = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$
- Sphériques : $\overrightarrow{\text{grad}} f(r, \theta, \phi) = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \cdot \sin \theta} \cdot \frac{\partial f}{\partial \phi} \vec{e}_\phi$

Propriété du gradient

Vecteur orienté vers les valeurs croissantes de la fonction.

donc $\overrightarrow{\text{grad}}T$ est dirigé du froid vers chaud.

- **Importance du signe – pour le 2^{ème} principe de la thermodynamique**

Loi de Fourier (1807)

$$\vec{\phi}(M, t) = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}T(M, t)$$



Hypothèses de validité de l'expression :

- **Le milieu est homogène** : les propriétés physiques du milieu sont les mêmes en tout point. λ ne dépend pas des coordonnées de l'espace.
- **Le milieu est isotrope** : les propriétés physiques du milieu sont les même dans les toutes les directions. Dans le cas contraire (exemple le bois) :

$$\vec{\phi} = - \begin{pmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{xy} & \lambda_{xz} \\ \lambda_{yx} & \lambda_{yy} & \lambda_{yz} \\ \lambda_{zx} & \lambda_{zy} & \lambda_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{pmatrix}$$

- λ ne dépend pas de la **température** ou de la **pression**.

Loi de Fourier (1807)

$$\vec{\phi}(M, t) = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}T(M, t)$$



Corrections de la loi de Fourier :

- **Formule de Cattaneo-Vernotte** : prise en compte de l'inertie du milieu lors de la mise en place du gradient de température.

$$\vec{\phi}(M, t) + \tau \frac{\partial \vec{\phi}(M, t)}{\partial t} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}T(M, t)$$

avec τ le temps de relaxation en s. Ordre de grandeur : 10^{-12} s à 10^{-9} s

- **Autres formules** : voir *R.E. Khayat, J. deBruyn, D.F. Stranges, and R.M.H. Khorasany. Non-Fourier effects in macro- and micro-scale non isothermal flow of liquids nad gases. Review. Int. J. of Thermal Scien., 97 :163–177, 2015*

Quelques valeurs de conductivité thermique λ des matériaux

Matériaux	Conductivité thermique ($\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$)
Argent	4183
Graphène	4000
Cuivre	3903
Diamant	1000
Fer	804
Plomb	354
Or	317
Aluminium	237
Zinc	116
Platine	71,6
Étain	66,6
Fonte	50
Acier doux	46
Titane	20
Verre	1,2
Brique	0,84
Eau	0,6
Hélium	0,14
Laine de verre	0,03
Air	0,0262

Conducteur
thermique

Isolant
thermique

En règle général, les gaz et liquide ont un faible λ . Mais attention à la convection !

Valeurs prises à pression atmosphérique et à température $\approx 20^\circ\text{C}$.

Etablissement de l'équation de la chaleur

- On considère un volume de contrôle V du milieu, supposé indéformable et fixe. Aucune puissance mécanique échangée avec l'extérieur.
- On réalise un bilan d'énergie à l'intérieur du volume de contrôle = application du 1^{er} principe de la thermodynamique :

variation d'énergie interne = production - échanges

$P(x, y, z, t)$ une production volumique de chaleur en $\text{W}\cdot\text{m}^{-3}$.
(effet Joule, changement de phase, réaction chimique, radioactivité, ...)

$$\Phi = \iint_S (-\lambda \overrightarrow{\text{grad}T}) \cdot \vec{n} dS$$

- On obtient une relation qui est indépendante du volume V considéré.

Equation de la chaleur

$$\frac{\partial T(M, t)}{\partial t} - \frac{\lambda}{\rho \cdot C_V} \Delta T(M, t) = \frac{P(M, t)}{\rho \cdot C_V}$$

Avec ρ la masse molaire du milieu, supposé constante.

Avec C_V la capacité calorifique massique à volume constant, supposée constante.

Formulation du Laplacien dans différents systèmes de coordonnées :

- Cartésiennes : $\Delta f(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$
- Cylindriques : $\Delta f(r, \theta, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$
- Sphériques : $\Delta f(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \cdot \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$

Equation de la chaleur

$$\frac{\partial T(M, t)}{\partial t} - \frac{\lambda}{\rho \cdot C_V} \Delta T(M, t) = \frac{P(M, t)}{\rho \cdot C_V}$$

Il s'agit d'une équation de diffusion :

$$\frac{\partial f(M, t)}{\partial t} - k \Delta f(M, t) = u(M, t) \quad \text{avec} \quad k > 0$$

Interprétation : quand il y a une inhomogénéité (ici en température) dans le milieu, un processus de diffusion a lieu naturellement pour rétablir l'homogénéité.

Phénomène similaire à :

- Diffusion de particules (loi de Fick)
- Diffusion de charges (loi d'Ohm locale)
- Diffusion de la quantité de mouvement dans un fluide (due à la viscosité du fluide)

Résolution de l'équation de la chaleur dans le cas le plus simple :

- **Régime stationnaire** : plus de dépendance par rapport au temps

$$-\frac{\lambda}{\rho \cdot C_V} \Delta T(M) = \frac{P(M)}{\rho \cdot C_V}$$

- **Sans source de chaleur** :

$$\Delta T(M) = 0 \quad (\text{équation de Laplace})$$

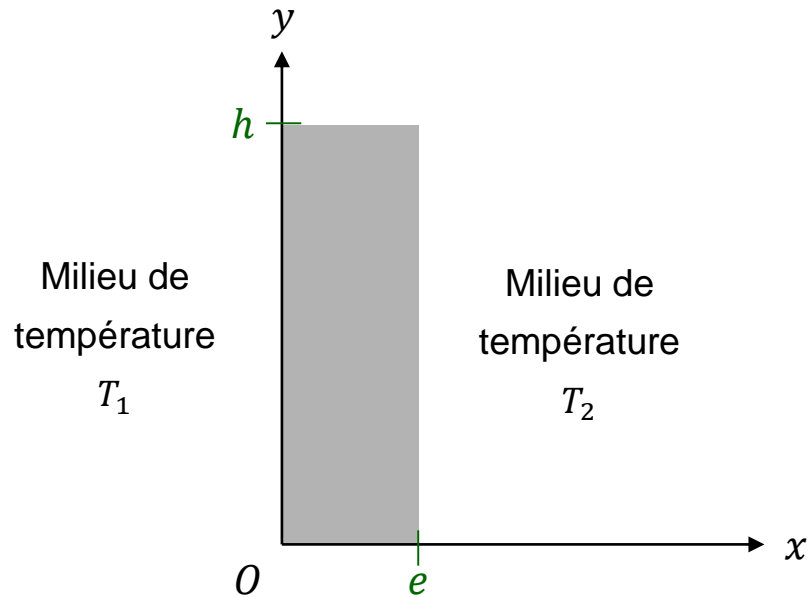
La distribution en T du milieu ne dépend plus la conductivité thermique λ du milieu.

- **1D** = dépendance spatiale monodimensionnelle : dépend d'une seule et unique variable spatiale

2. Conduction

Résolution de l'équation de la chaleur dans le cas le plus simple :

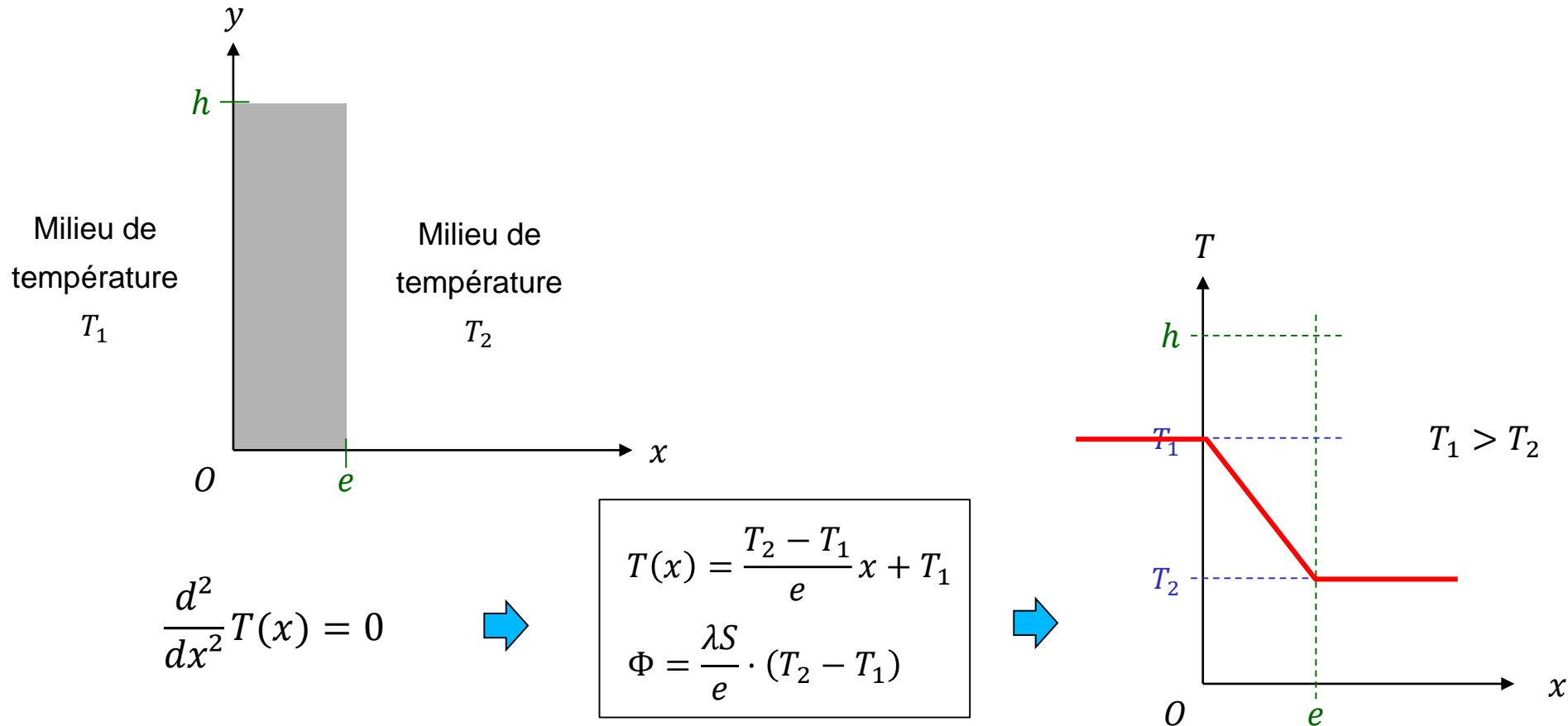
- Cas d'un mur d'épaisseur e et de hauteur h



2. Conduction

Résolution de l'équation de la chaleur dans le cas le plus simple :

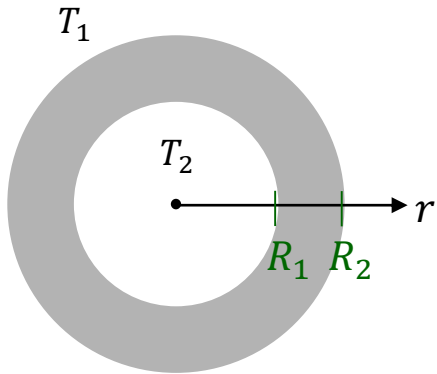
- Cas d'un mur d'épaisseur e et de hauteur h



2. Conduction

Résolution de l'équation dans le cas le plus simple + monodimensionnelle

- Cas d'un tube de rayons intérieur R_1 et extérieur R_2

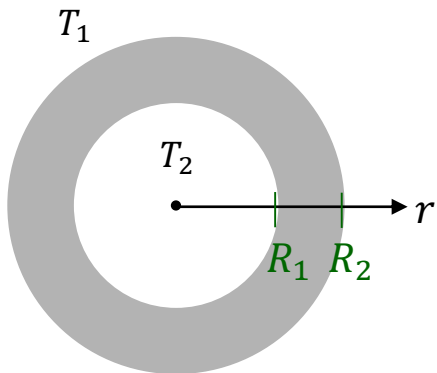


$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT(r)}{dr} \right) = 0$$

$$T(r) = \frac{1}{\ln(R_2) - \ln(R_1)} \cdot ((T_2 - T_1) \ln r + (T_1 \ln(R_2) - T_2 \ln(R_1)))$$

$$\Phi = \frac{2\pi L \lambda}{\ln(R_2/R_1)} \cdot (T_2 - T_1)$$

- Cas d'une sphère creuse de rayons intérieur R_1 et extérieur R_2



$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT(r)}{dr} \right) = 0$$

$$T(r) = \frac{1}{R_2 - R_1} \cdot \left(-(T_2 - T_1) R_2 R_1 \frac{1}{r^2} + (T_1 R_2 - T_2 R_1) \right)$$

$$\Phi = \frac{4\pi \lambda L R_1 R_2}{R_2 - R_1} \cdot (T_2 - T_1)$$

Principe des résistances thermiques

Cas stationnaire + sans terme de source + 1D

→ Déf d'une résistance thermique R_{th} par la loi de Fourier intégrale :

$$\Phi = 1/R_{th} \cdot \Delta T$$

$$R_{th} = \frac{1}{\lambda} \left(\int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{dS(s)} \right) \text{ en K/W}$$


- Forme parallélépipédique : $R_{th} = \frac{e}{\lambda \cdot S}$
- Forme cylindrique : $R_{th} = \frac{\ln(R_2/R_1)}{2\pi\lambda L}$
- Forme sphérique : $R_{th} = \frac{1}{4\pi\lambda L} \left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right)$
- Autres formes : voir références comme Handbook of Heat Transfert

Principe des résistances thermiques

D'autres notations possibles :

- On peut aussi définir la conductance thermique G_{th} : $\Phi = G_{th}\Delta T$
- On peut définir les grandeurs surfaciques :
 - Résistance thermique massique : r_{th} en $K.m^2.W^{-1}$
 - Conductance thermique massique : g_{th} en $K.m^2.W^{-1}$
- Le g_{th} global d'une paroi est aussi appelée **U** ou anciennement **k**.

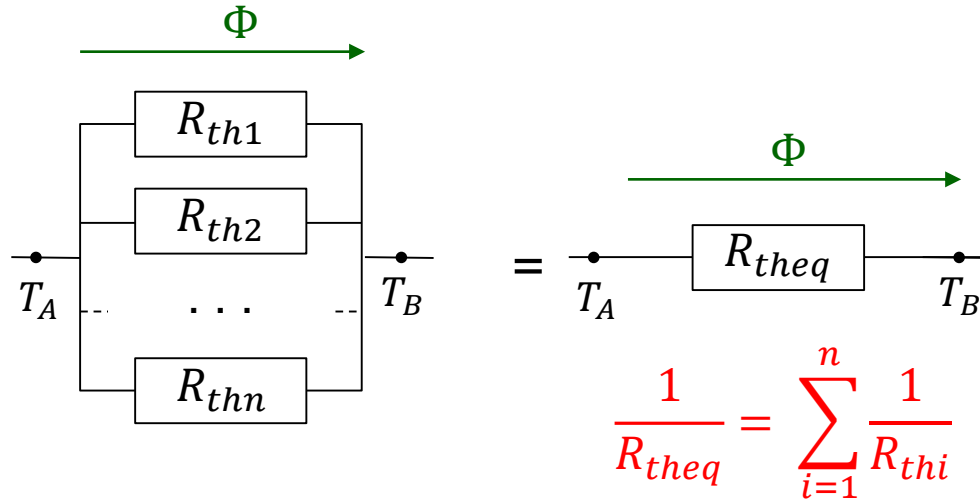
Principe des résistances thermiques

Electrique	Thermique
Intensité électrique $I = \frac{dq}{dt} = \int \vec{j} \cdot \vec{dS}$ [A]	Flux thermique Φ [W]
Vecteur densité de courant : \vec{j} [A/m ²]	Vecteur densité de flux thermique $\vec{\phi}$ [W/m ²]
Potentiel V [V]	Température T [K]
Résistance électrique R [Ω]	Résistance thermique $R_{th} = \frac{e}{\lambda \cdot S}$ [K/W]
Loi d'Ohm locale	Loi de Fourier
Loi d'Ohm $\Delta U = V_1 - V_2 = R \cdot I$	Loi de Fourier intégrale $\Delta T = T_1 - T_2 = R_{th} \cdot \Phi$

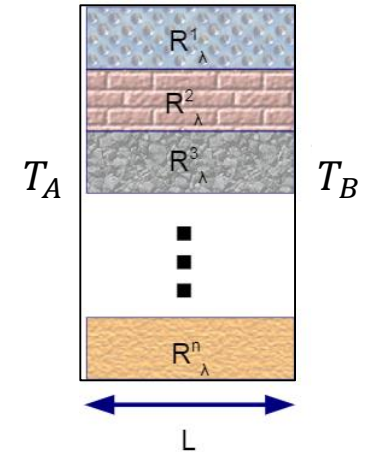
2. Conduction

Principe des résistances thermiques

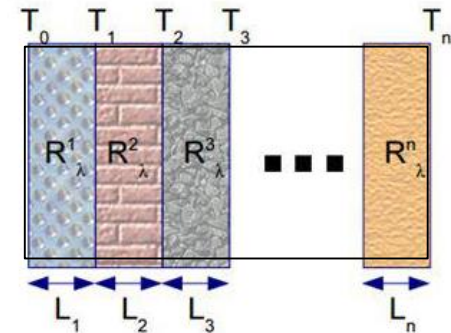
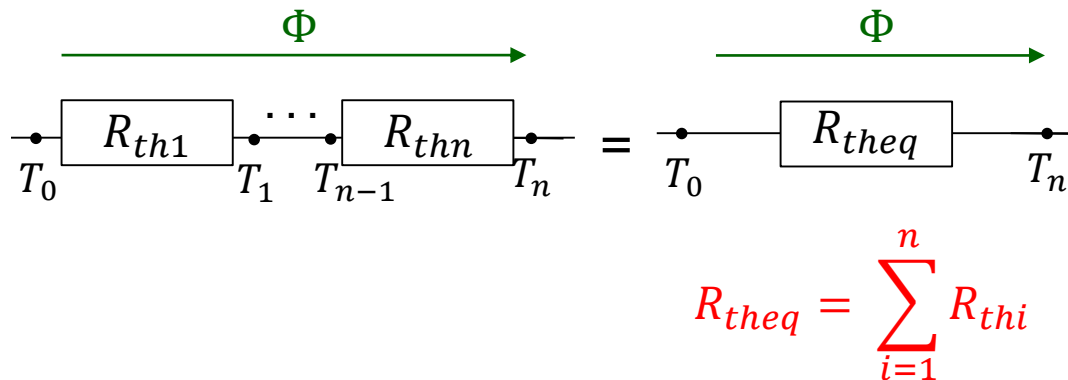
Résistances en parallèle



Exemple d'un mur



Résistances en série



Résolution de l'équation de la chaleur dans le cas instationnaire :

- Régime instationnaire : $T = T(M, t)$

diffusivité thermique a (en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$)

$$\frac{\partial T(M, t)}{\partial t} - \frac{\lambda}{\rho \cdot C_v} \Delta T(M, t) = \frac{P}{\rho \cdot C_v}$$

Interprétation de la diffusivité thermique :

rapidité de propagation de la chaleur à l'intérieur du matériau.

Cas extrêmes :

- $a = +\infty$: propagation instantanée de la chaleur dans le matériau.
→ revient aux conditions de régime stationnaire.
- $a = 0$: propagation infiniment lente
→ distribution spatiale de la température du milieu n'évolue pas.

Quelques valeurs de diffusivité thermique α des matériaux

Matériau	Masse volumique ρ (kg/m ³)	Capacité thermique massique C_p (J.kg ⁻¹ .K ⁻¹)	Conductivité thermique λ (W.m ⁻¹ .K ⁻¹)	Diffusivité thermique α (10 ⁻⁶ m ² .s ⁻¹)
Argent	10 500	235	427,00	173,05
Or	19 260	129	316,00	127,19
Cuivre	8 930	382	399,00	116,97
Aluminium	2 700	888	237,00	98,85
Silicium	2 330	700	148,00	90,74
Zinc	7 100	387	121,00	44,04
Chrome	6 920	440	91,00	29,89
Platine	21 370	133	71,00	24,98
Plomb	11 340	129	35,00	23,93
Fer	7 860	452	81,00	22,80
Air	1	1 010	0,03	19,80
Bronze	8 800	377	62,00	18,69
Marbre	2 600	800	2,80	1,35
Glace (0 °C)	917	2 040	2,25	1,20
Granit	2 750	890	2,90	1,18
Laine de verre	120	660	0,05	0,58
Béton	2 400	880	1,10	0,52
Verre à vitre	2 480	700	0,87	0,50
Brique	1 600	840	0,38	0,28
Liège	190	1 880	0,04	0,11

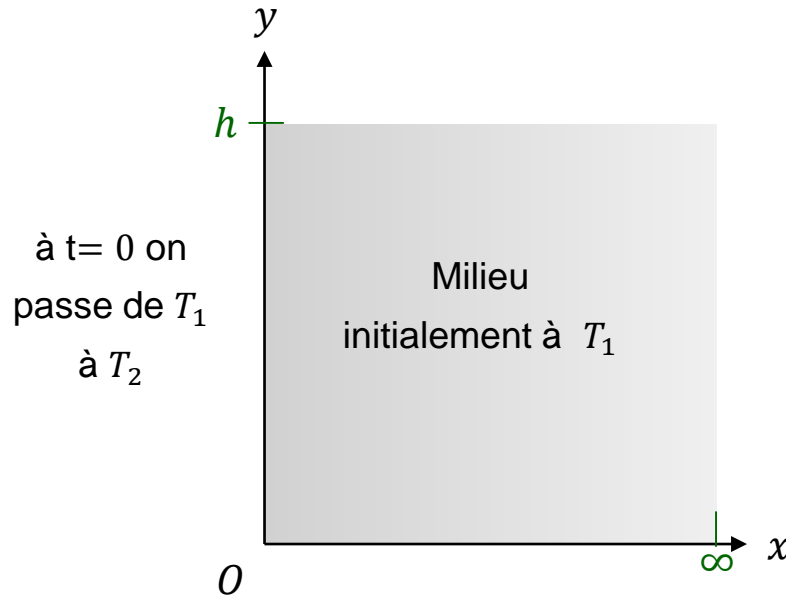
Calculer à partir de la relation

$$\alpha = \frac{\lambda}{\rho \cdot C_p}$$

Valeurs prises à la pression atmosphérique et à une température proche de 20°C.

Régime instationnaire : milieu semi-infini + échelon de température

Exemple d'un mur très épais



$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} - a \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} = 0$$

Transformation de Boltzmann : $\eta(x, t) = \frac{x}{\sqrt{at}}$

$$\frac{d^2 T(\eta)}{d\eta^2} + \frac{\eta}{2} \cdot \frac{dT(\eta)}{d\eta} = 0$$

$$T(x, t) = (T_1 - T_2) \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) + T_1$$

$$\Phi(x, t) = -\lambda \cdot \frac{(T_1 - T_2)}{\sqrt{\pi at}} \exp\left(\frac{-x^2}{4at}\right)$$

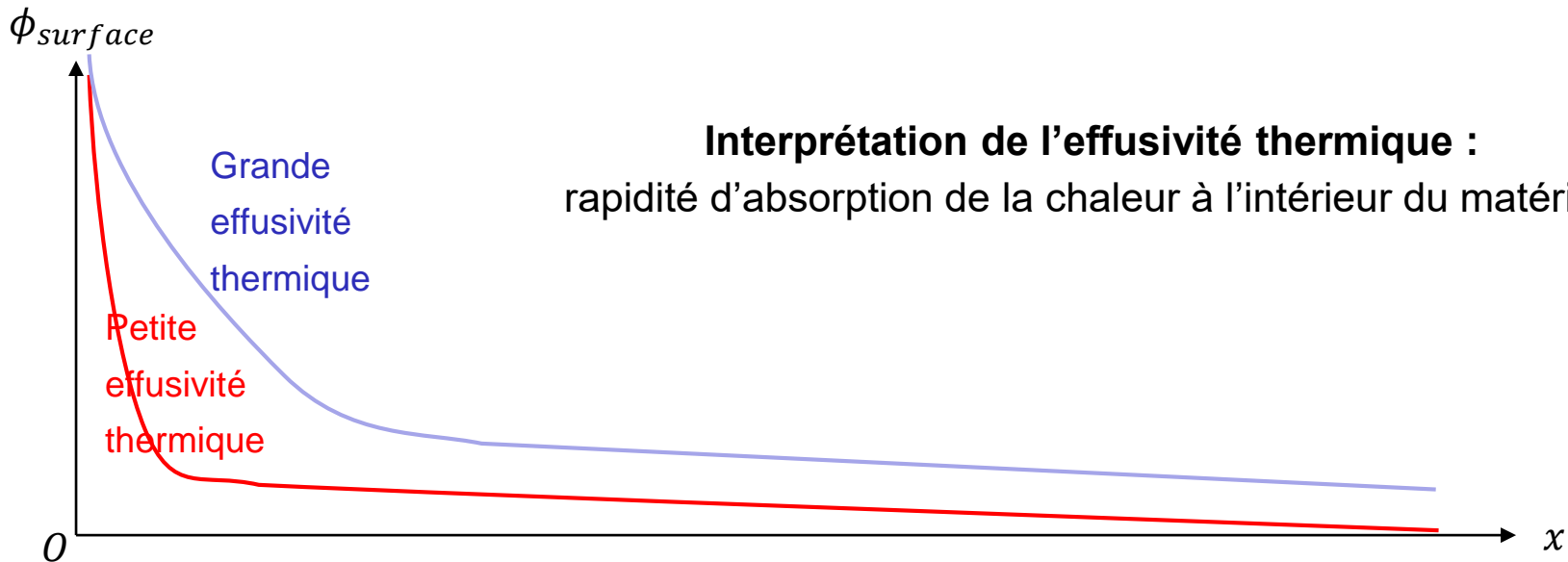
avec erf la fonction d'erreur de Gauss définie par : $\operatorname{erf}(u) = \frac{2}{\pi} \int_0^u \exp(-v^2) dv$

Régime instationnaire : milieu semi-infini + échelon de température

Regardons comment évolue avec le flux à la surface du mur c'est-à-dire quand $x = 0$:

$$\Phi(x = 0, t) = - \frac{\lambda}{\sqrt{a}} \cdot \frac{(T_1 - T_2)}{\sqrt{\pi t}}$$

effusivité thermique E en $J.K^{-1}.m^{-2}.s^{-1/2}$



Interprétation de l'effusivité thermique :
rapidité d'absorption de la chaleur à l'intérieur du matériau.

Quelques valeurs d'effusivité thermique E des matériaux

Matériau	Masse volumique ρ (kg/m ³)	Capacité thermique massique C_p (J.kg ⁻¹ .K ⁻¹)	Conductivité thermique λ (W.m ⁻¹ .K ⁻¹)	Diffusivité thermique a (10 ⁻⁶ m ² .s ⁻¹)	Effusivité thermique E (J.K ⁻¹ .m ⁻² .s ^{-1/2})
Cuivre	8 930	382	399,00	116,97	36 893
Argent	10 500	235	427,00	173,05	32 460
Or	19 260	129	316,00	127,19	28 020
Aluminium	2 700	888	237,00	98,85	23 838
Zinc	7 100	387	121,00	44,04	18 234
Fer	7 860	452	81,00	22,80	16 964
Chrome	6 920	440	91,00	29,89	16 646
Silicium	2 330	700	148,00	90,74	15 537
Bronze	8 800	377	62,00	18,69	14 342
Platine	21 370	133	71,00	24,98	14 206
Plomb	11 340	129	35,00	23,93	7 155
Granit	2 750	890	2,90	1,18	2 664
Marbre	2 600	800	2,80	1,35	2 413
Glace (0 °C)	917	2 040	2,25	1,20	2 052
Béton	2 400	880	1,10	0,52	1 524
Verre à vitre	2 480	700	0,87	0,50	1 229
Brique	1 600	840	0,38	0,28	715
Liège	190	1 880	0,04	0,11	121
Laine de verre	120	660	0,05	0,58	60
Air	1	1 010	0,03	19,80	6

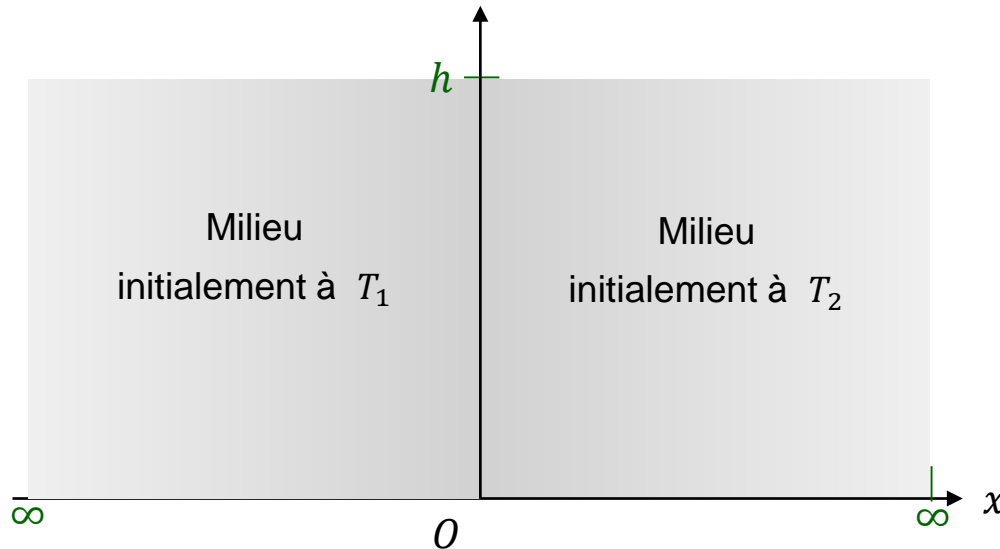
Calculer à partir de la relation

$$E = \rho \cdot C_p \cdot \sqrt{a}$$

Valeurs prises à la pression atmosphérique et à une température proche de 20°C.

2. Conduction

Influence de l'effusivité thermique lors du contact de 2 milieux semi-infinis



À $T=0$ on met en contacte les 2 milieux.
Quelle est la température de contact T_C ?

$$\Phi_1 = -E_1 \cdot \frac{(T_1 - T_C)}{\sqrt{\pi t}} \quad \Phi_2 = -E_2 \cdot \frac{(T_C - T_2)}{\sqrt{\pi t}}$$

$$T_C = \frac{E_1 T_1 + E_2 T_2}{E_1 + E_2}$$

Autre interprétation de l'effusivité :
C'est la capacité d'un milieu à imposer sa température lors d'un choc thermique.

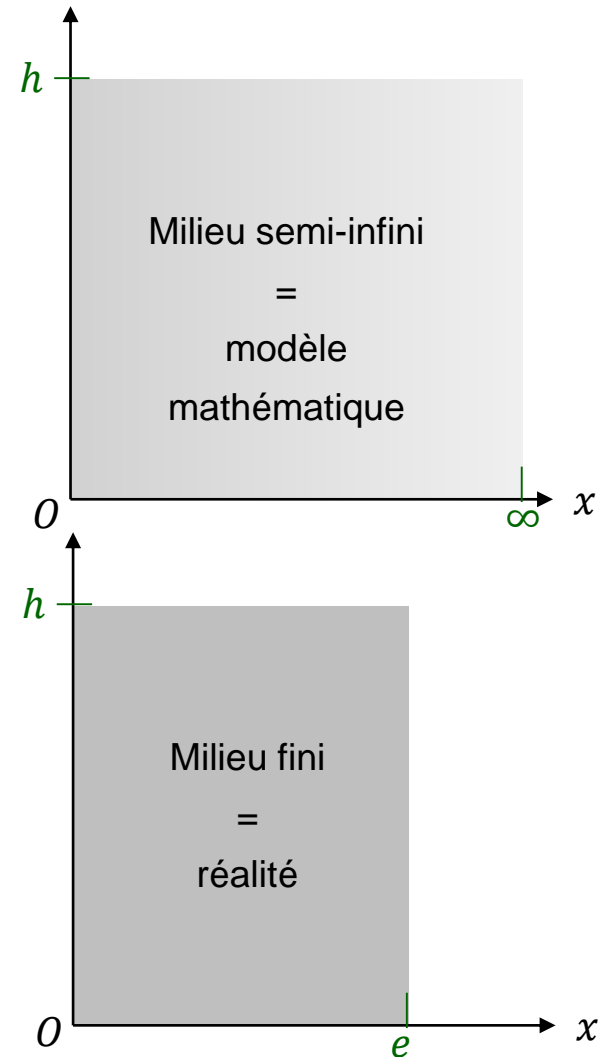
- si $E_1 \ll E_2$: $T_C \approx T_2$
- si $E_2 \ll E_1$: $T_C \approx T_1$

Remarque : validité de l'hypothèse semi-infini

Nombre de Fourier: $F_0 = \frac{at}{L^2}$
avec L est la longueur caractéristique

ici L correspond
à l'épaisseur du milieu e

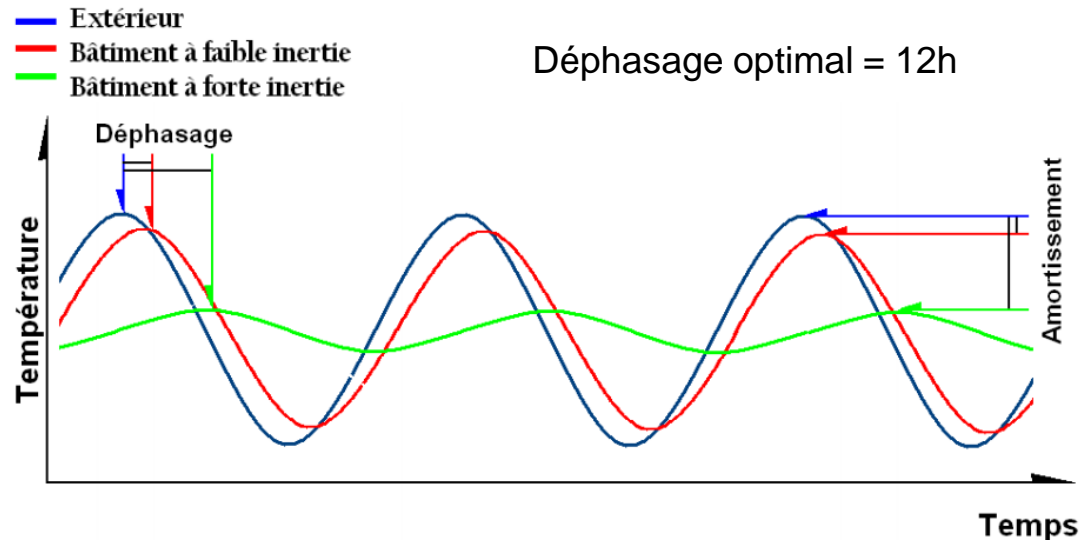
- $F_0 \ll 1$: matériau se comporte comme un milieu semi-infini à l'instant t
- $F_0 \gg 1$: matériau ne se comporte pas comme un milieu semi-infini à l'instant t
→ problème + difficile à résoudre
→ méthode numérique



Cas de l'inertie thermique dans le secteur du bâtiment

Contexte :

influence des conditions extérieures (rayonnement solaire, variation de T_{ext} , ...) sur les conditions intérieures du bâtiment.



Pour garantir le confort d'été (éviter les surchauffes) on essaiera d'utiliser un matériau possédant les caractéristiques suivantes :

- une **faible diffusivité** : l'échange d'énergie thermique entre le climat extérieur et le climat intérieur se fasse le plus lentement possible (inertie en transmission).
- une **forte effusivité** : le mur stocke au maximum la fraîcheur dans les éléments en contact avec l'intérieur du bâtiment (inertie par absorption).

Autres méthodes de résolution de l'équation de la chaleur instationnaire – volet analytique

- **Série de Fourier**

- Mathématiquement : applicable à toute fonction périodique
- Exemple d'application : barre de longueur L
(astuce : on rend la fonction $T(x)$ périodique)
- Solution décomposée en somme de sinusoides.



- **Transformée de Fourier**

- Mathématiquement : applicable à toute fonction carrée sommable
- Exemple d'application : barre de longueur infinie
- Solution dans le domaine des fréquences

- **Transformée de Laplace**

- Mathématiquement : applicable à toute fonction causale sommable
- Exemple d'application : barre de longueur semi-infinie
- Solution dans le domaine des « fréquences complexes » p
→ méthode des impédances thermiques

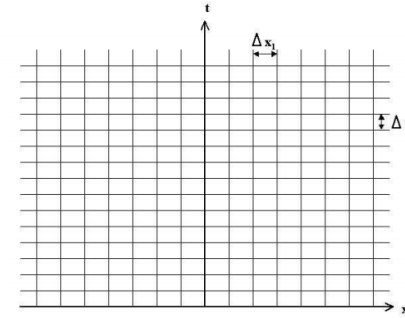
Généralisable
aux
distributions
tempérées

Autres méthodes de résolution de l'équation de la chaleur instationnaire – volet numérique

- **Méthode des différences finies**

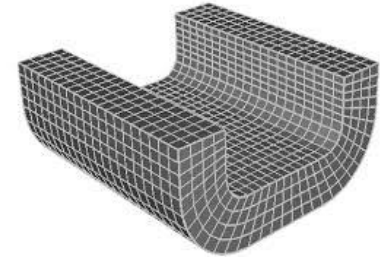
- Discrétisation du problème
- Approximation des dérivées en chaque point :

- $$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$



- **Méthode des éléments finis**

- La géométrie du système est modélisée par un maillage régulier qui constitue un pavage.
- On applique l'équation à chaque pavé appelé « élément ».
- Forme forte de la formulation intégrale de l'équation à résoudre.



- **Méthode des volumes finis**

- Maillage non structurée.
- Forme faible (ou variationnelle) de la formulation intégrale de l'équation à résoudre.
- Intégrales sur les volumes sont transformées en intégrales sur les surfaces.

Ce qu'il faut retenir

- **Propriétés des matériaux :**

- Conductivité thermique λ
- Diffusivité thermique a
- Effusivité thermique E

} caractérise l'inertie thermique

} Les 3 grandeurs
sont liées

- **Théorie de la conduction thermique :**

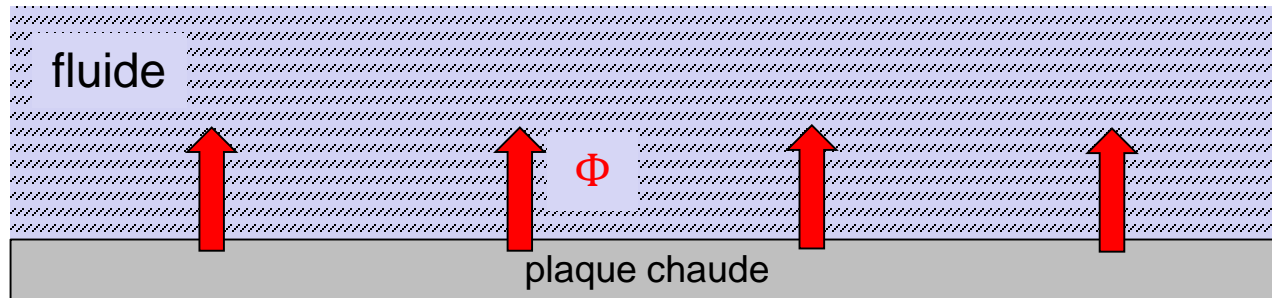
- Résoudre l'équation de la chaleur \rightarrow distribution de la température du milieu.
- Intégrer la loi de Fourier \rightarrow expression du flux thermique.
- \rightarrow Seuls quelques cas simples sont résolubles analytiquement, avec des outils mathématiques spécifiques (série de Fourier, transformée de Laplace, ...)

- **Méthode des résistances thermiques:**

- Très pratique mais valable sous certaines hypothèses.
- La méthode sera complétée par les autres modes de transferts thermiques (dans l'hypothèse qu'ils soient linéarisables).

3. Convection

Position du problème : échange de chaleur entre un fluide et une plaque plane horizontale

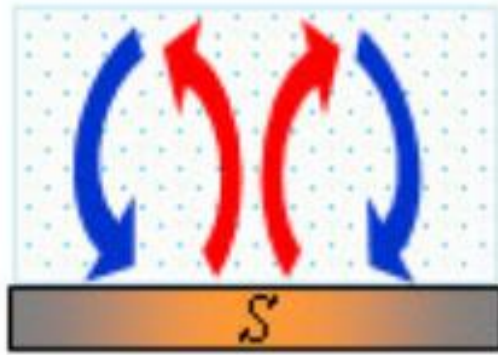


Plusieurs cas de figures :

- **Mode de convection** : convection naturelle, forcée ou mixte
- **Type d'écoulement** : écoulement laminaire, transitoire ou turbulent

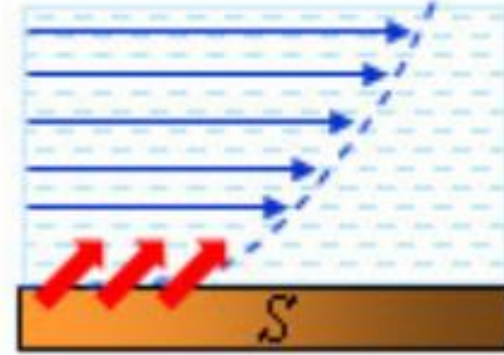
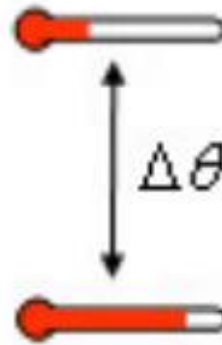
3. Convection

Convection naturelle et forcée



Convection naturelle

Mouvements du fluide sont induits naturellement par gravité + poussée d'Archimède due aux différences de masse volumiques dues à la variation de température.



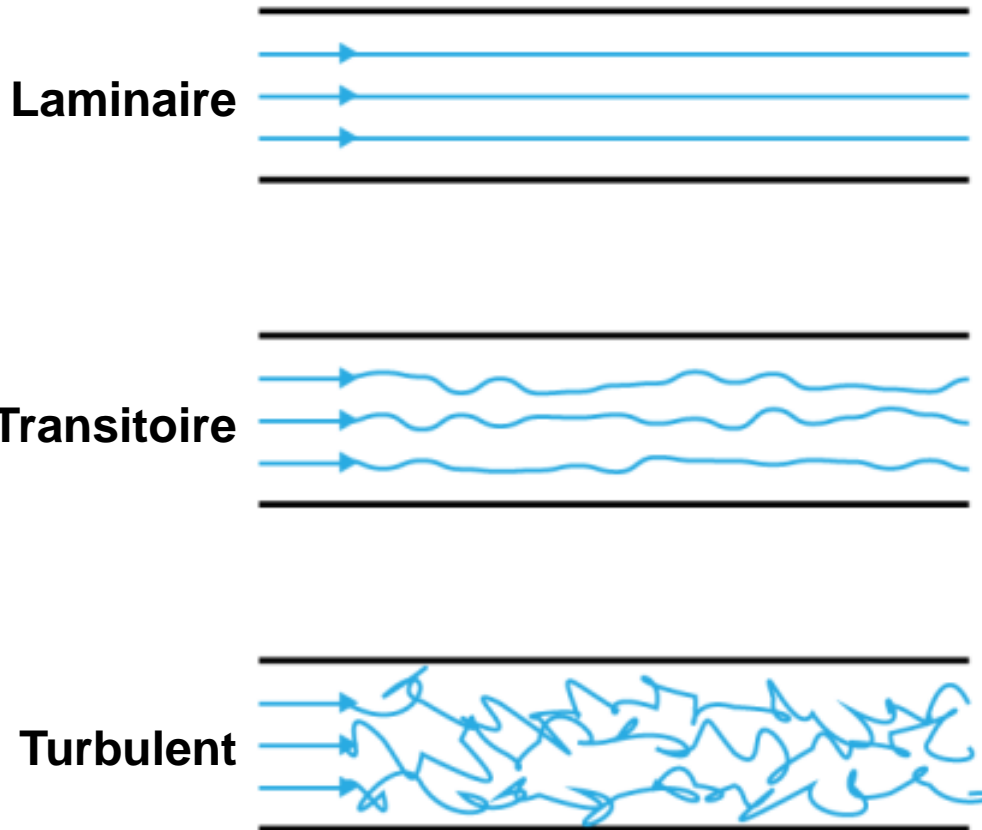
Convection forcée

Mouvements du fluide sont provoqués par des moyens externes (ventilateur, pompe, vent, ...)

Convection mixte : moyens externes + gravité / poussée d'Archimède

3. Convection

Types d'écoulement (Reynolds 1883)



Exemple
d'un tube



2 000

3 000

Nombre de Reynolds (adimensionnel)

$$R_e = \frac{v \cdot L}{\nu}$$

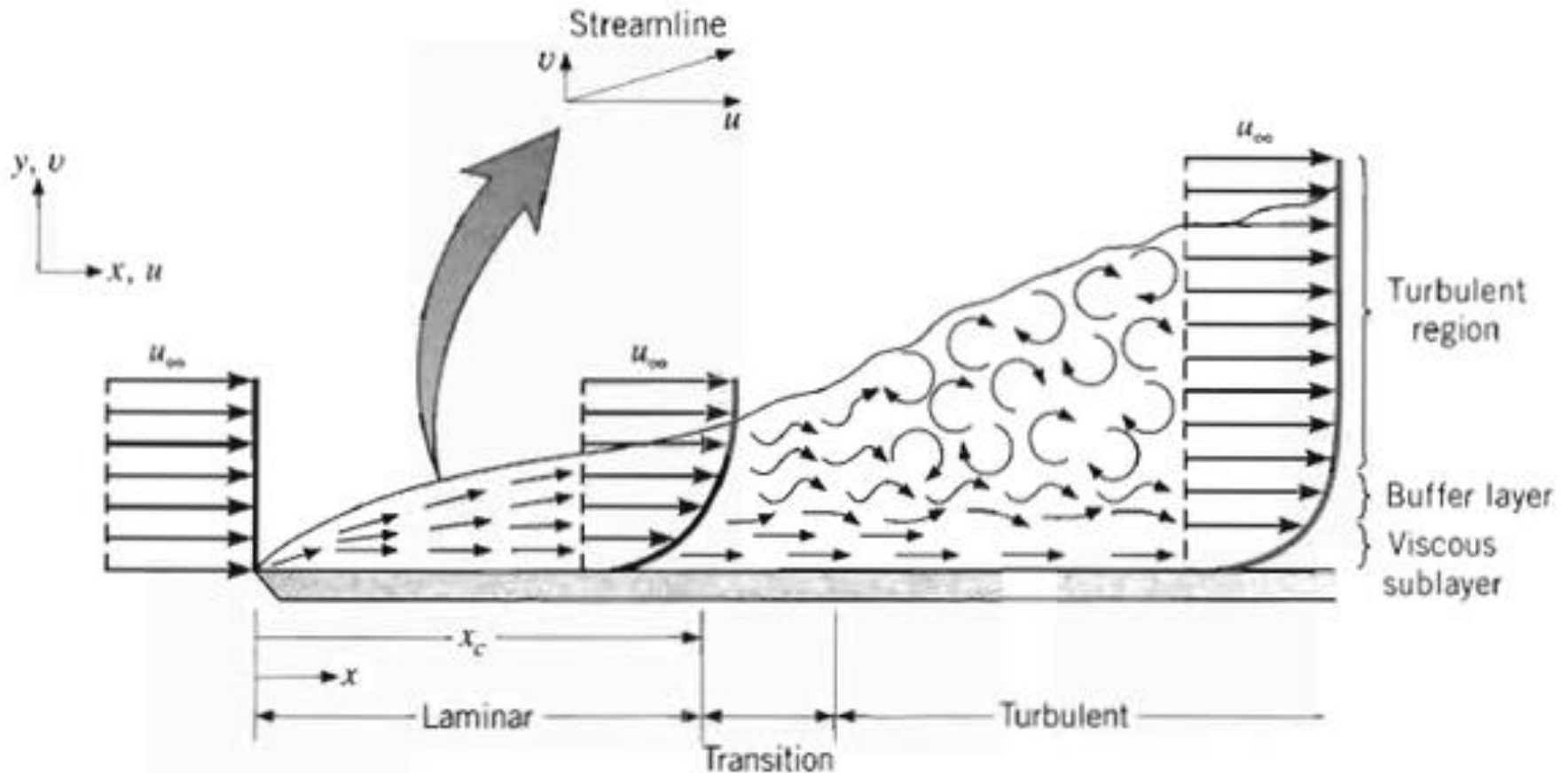
avec :

- v la vitesse moyenne du fluide ($\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$)
- L la longueur caractéristique de l'écoulement (m)
- ν la viscosité cinématique ($\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$). Elle est reliée à la viscosité dynamique μ (Pa.s) par la masse volumique ρ ($\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$)

$$\mu = \nu \cdot \rho$$

3. Convection

Types d'écoulement (Reynolds 1883)



La théorie de la convection :

- **Approche théorique :**

- **contexte de la mécanique des milieux continus**

- Prise en compte de la conduction thermique dans le milieu
 - Prise en compte du transport de la quantité de mouvement dans le milieu (advection)
 - Besoin du profil de vitesse dans l'écoulement (équation de Navier-Stokes)
 - Résolvable analytiquement dans des cas extrêmement simples.
 - Simulation numérique requise.



- **Approche phénoménologique :**

- **loi empirique basée sur l'expérience : loi de Newton → approximation**

Approche phénoménologique : loi de Newton (1701)

Newton modélise le flux total par convection par une **loi linéaire empirique**, valable quelque soit le type de convection, d'écoulement et de géométrie :

$$\Phi = h \cdot S \cdot (T_S - T_\infty)$$

avec :

- T_S : la température de la surface d'échange
- T_∞ : la température du fluide (loin de la surface d'échange)
- S : la surface d'échange
- h : le coefficient de convection $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$

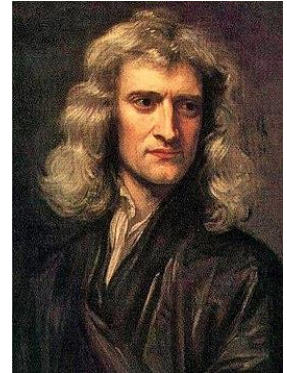
h peut dépendre du point de la surface. On peut le remplacer par un h moyen :

$$\bar{h} = \iint_S h \cdot dS$$

On peut définir une **résistance thermique de convection** qui peut être combinée avec la résistance thermique de conduction :

$$\Phi = \frac{1}{R_{th}} \cdot (T_S - T_\infty) \quad \text{avec}$$

$$R_{th} = \frac{1}{h \cdot S}$$



Gamme de valeurs pour h ($\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$) :

	Convection libre	Convection forcée
Air	5 – 30	30 - 500
Eau	30 – 300	300 – 20 000
Huile	5 – 100	30 - 3000
Métal liquide	50 – 500	500 – 2 000

Cas extrêmes :

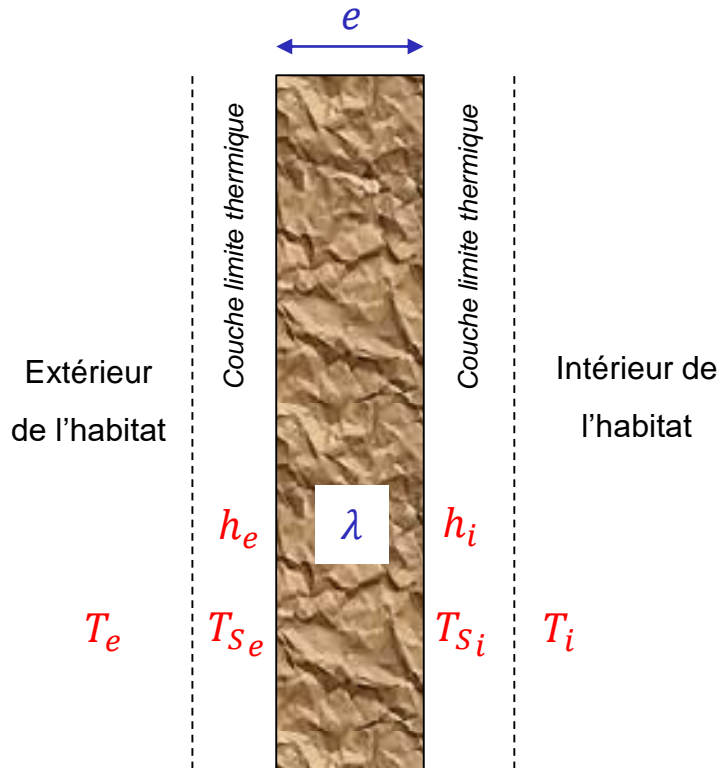
- $h = 0$: absence de flux. La paroi se comporte comme si elle était adiabatique.
- $h = +\infty$: aucune résistance thermique de convection. $T_p = T_\infty$

Méthode de calcul de h sera expliquée dans les prochains transparents.

3. Convection

Approche phénoménologique : loi de Newton (1701)

Exemple d'un mur de brique :



Conduction thermique
(problème stationnaire 1D sans source)

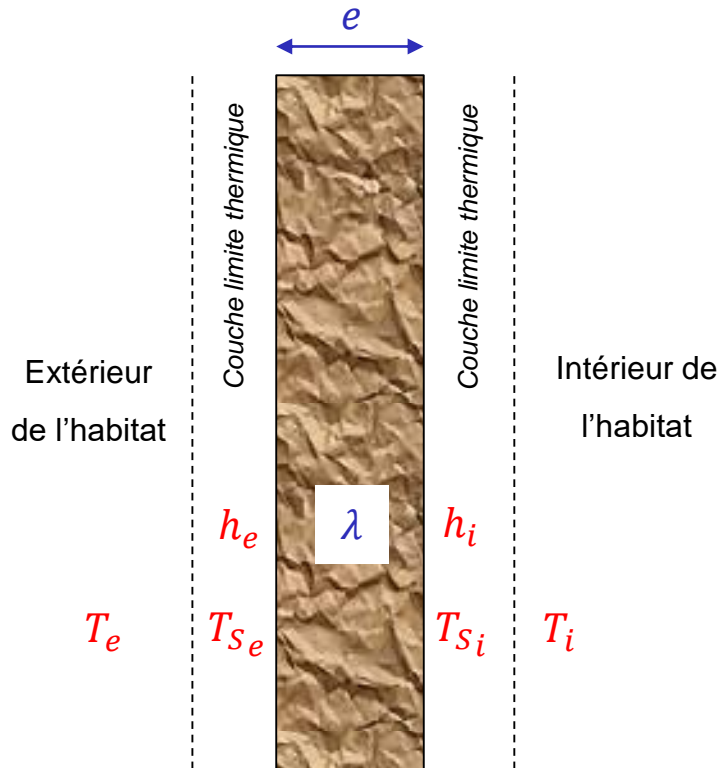
+

Convection
(loi de Newton)

3. Convection

Approche phénoménologique : loi de Newton (1701)

Exemple d'un mur de brique :



$$\Phi = \frac{\Delta T}{R_{th}}$$

$$\begin{aligned} \text{avec } R_{th} &= R_{convection_{ext}} + R_{conduction} + R_{convection_{int}} \\ &= \frac{1}{h_{se} \cdot S} + \frac{e}{\lambda \cdot S} + \frac{1}{h_{si} \cdot S} \end{aligned}$$

Valeurs prises :

- $e = 0.3 \text{ m}$, $S = 10 \text{ m}^2$ et $\Delta T = 20 \text{ K}$
- $1/h_{si} = 0.13 \text{ m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1}$ (Règles Th-U fascicule 4/5)
- $1/h_{se} = 0.04 \text{ m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1}$ (Règles Th-U fascicule 4/5)
- $\lambda = 0.84 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ (Règles Th-U fascicule 2/5)

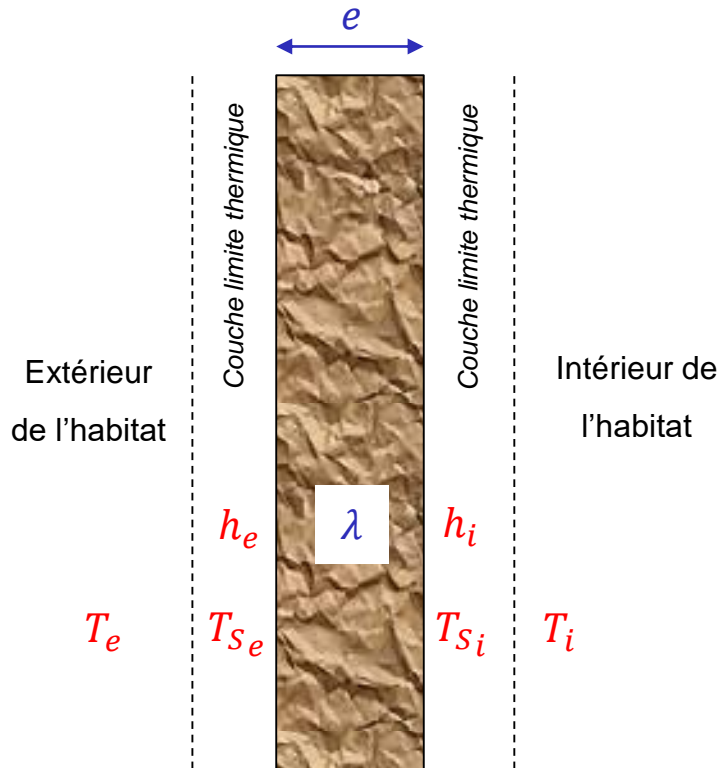
→ $\Phi \approx 105 \text{ W}$

→ Sans prise en compte de la convection :
on aurait sous-estimé Φ de 32%.

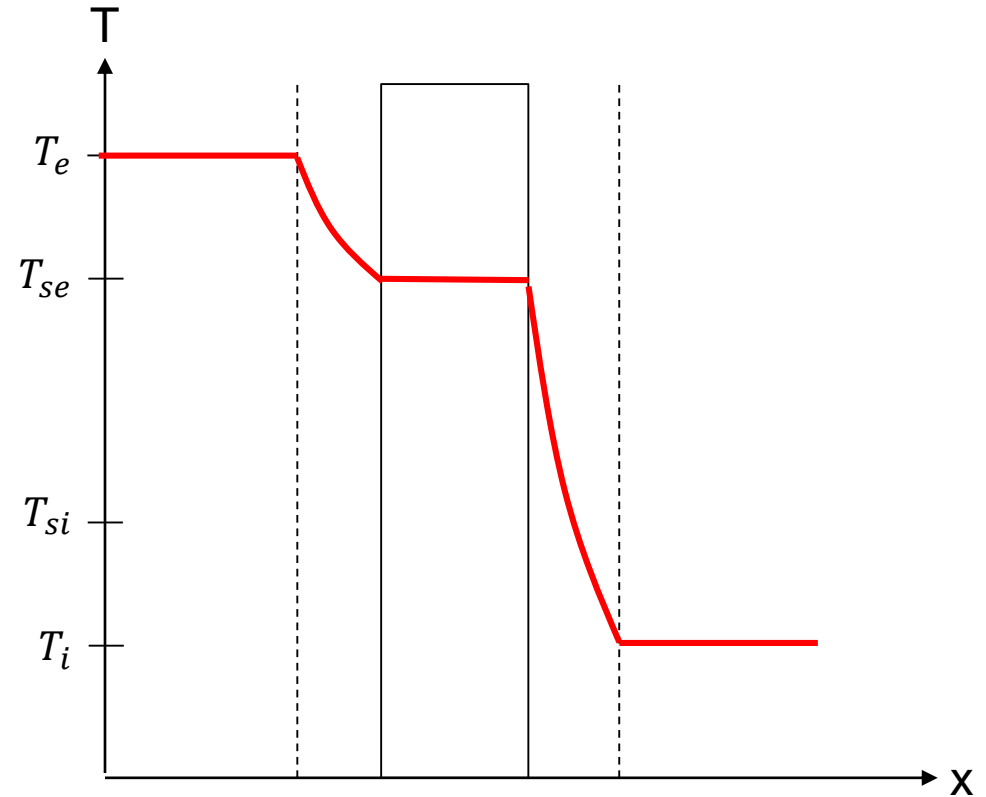
3. Convection

Proportion conduction-convection

Exemple d'un mur de brique :



Dans certains cas : on peut considérer que le gradient de température dans l'épaisseur du mur est négligeable.



3. Convection

Proportion conduction-convection

Nombre de Biot : $Bi = \frac{hL}{\lambda}$

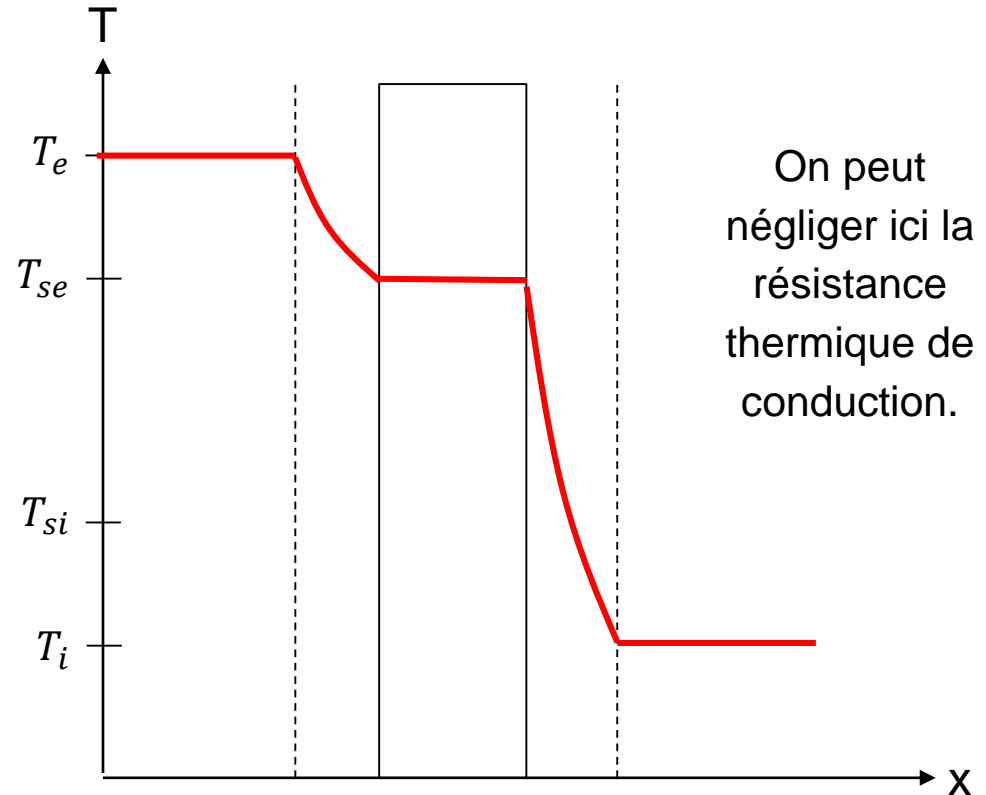
avec L est la longueur caractéristique

ici L correspond à l'épaisseur du mur e

$$Bi = \frac{R_{th\text{conduction}}}{R_{th\text{convection}}}$$

- $Bi \ll 1$: **thermiquement mince**
→ conduction négligeable
- $Bi \gg 1$: **thermiquement épais**
→ conduction non négligeable

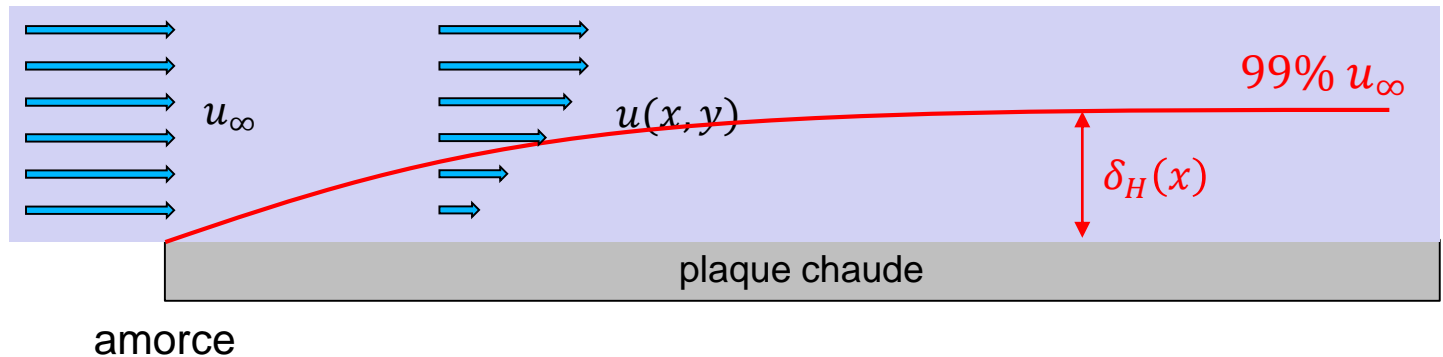
Dans certains cas : on peut considérer que le gradient de température dans l'épaisseur du mur est négligeable.



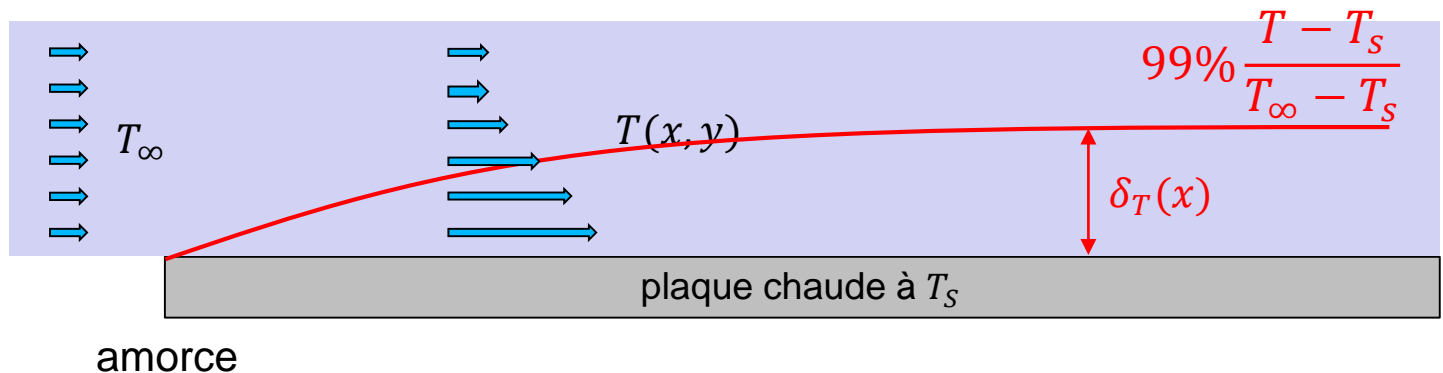
3. Convection

Couche limite thermique : vitesse faible + conduction est le mode principal

Couche limite hydrodynamique



Couche limite thermique



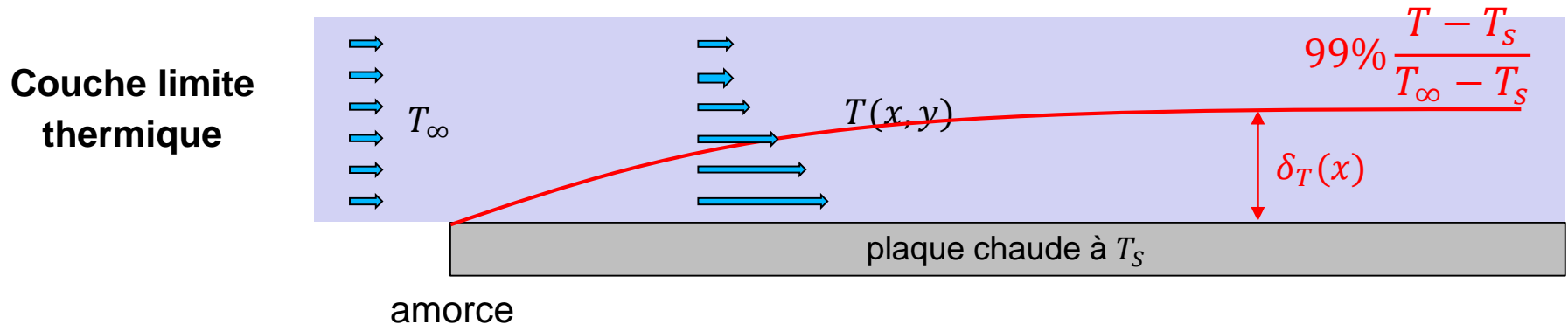
Couche limite thermique : vitesse faible + conduction est le mode principal

Ordre de grandeur de l'épaisseur de la couche limite thermique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi \approx \frac{\lambda_f S}{\delta_T} (T_\infty - T_s) \\ \Phi \approx \bar{h} S (T_\infty - T_s) \end{array} \right. \rightarrow \bar{h} \approx \frac{\lambda_f}{\delta_T}$$

h peut être interprétée comme la conductance thermique de la couche limite.

Épaisseur de la couche pour de l'eau : $\delta_T = 12 \text{ cm} - 2 \text{ cm}$ (laminaire)
 $\delta_T = 2 \text{ cm} - 0,12 \text{ cm}$ (turbulent)



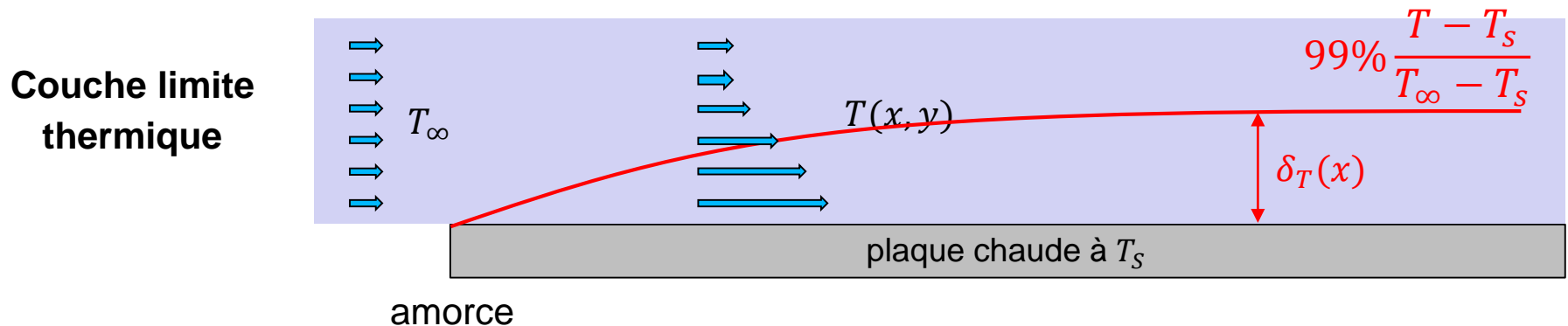
3. Convection

Couche limite thermique : vitesse faible + conduction est le mode principal

Valeur exacte de l'épaisseur de la couche limite thermique :

→ Étude théorique : bilan de masse et bilan de quantité de mouvement

- Cas d'une plaque horizontale
- Si laminaire $\delta_T(x) = \frac{4,64}{\sqrt{Re_x}} x$
 - Si turbulent $\delta_T(x) = \frac{0,37}{Re_x^{1/5}} x$
- avec Re_x le nombre de Reynolds local
- $$Re_x = \frac{v \cdot x}{\nu}$$



Comment calculer h ?

Etude de la couche limite thermique :

bilan de masse

+

bilan de quantité de mouvement

+

Bilan thermique



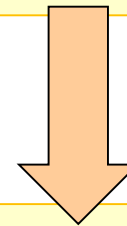
Lien entre h et le nombre de Nusselt

$$\overline{Nu} \cdot \frac{\lambda_f}{L} = \bar{h}$$

Nombre de Nusselt local :

$$Nu_x = \frac{h(x) \cdot x}{\lambda_f}$$

avec λ_f est la conductivité thermique du fluide



$$\overline{Nu} = \int_0^L \frac{Nu_x}{x} dx$$

Nombre de Nusselt moyen :

$$\overline{Nu} = \frac{\bar{h} \cdot L}{\lambda_f}$$

avec L la distance considérée de parcours fluide

Comment calculer h : utiliser les corrélations expérimentales

- Les problèmes de **convection forcée** font intervenir les nombres adimensionnels de **Reynolds** et **Prandtl** : $Nu = f(Re, Pr)$.
- Les problèmes de **convection naturelle** font intervenir les nombres adimensionnels de **Grashof** et **Prandtl** : $Nu = f(Gr, Pr)$

Nombre de **Rayleigh** Ra : permet de savoir si la conduction ou convection naturelle qui emporte sur un fluide $Ra = Gr \cdot Pr$

- $Ra < Ra_c$ conduction prédomine
- $Ra > Ra_c$ convection prédomine

Remarques :

- Les corrélations sont obtenues par analyse dimensionnelle et les coefficients généralement par l'expérience.
- Dans la littérature, on peut trouver plusieurs formules possibles pour un même cas de figure (tout dépend de l'auteur).
- Ces formules sont valables dans l'hypothèse de la couche limite thermique.

Exemples de corrélations calculables analytiquement :

écoulement sur une plaque plane (horizontale ou verticale)

- **Nombre de Reynolds critique :**
 $Re_C = (3 \text{ à } 5) \times 10^5$
- **Ecoulement forcé :**
 - **Régime laminaire** pour $Pr > 0,6$:
 - $Nu_x = 0,332 \cdot Re_x^{1/2} \cdot Pr^{1/3}$
 - $\overline{Nu} = 0,664 \cdot Re_L^{1/2} \cdot Pr^{1/3}$
 - **Régime turbulent** pour $0,6 < Pr < 60$:
 - $Nu_x = 0,0296 \cdot Re_x^{4/5} \cdot Pr^{1/3}$
 - $\overline{Nu} = 0,036 \cdot Re_L^{4/5} \cdot Pr^{1/3}$

écoulement sur une plaque plane (verticale uniquement ici)

- **Nombre de Rayleigh critique :**
 $Ra_x = 10^9$
- **Ecoulement naturel :**
 - **Régime laminaire :**
 - $Nu_x = 0,508 \cdot \left(\frac{Gr_x \cdot Pr^2}{0,952 + Pr} \right)^{1/4}$
 - $\overline{Nu} = \frac{4}{3} Nu_{x=L}$
 - **Régime turbulent :**
 - $Nu_x = 0,0295 \cdot \left(\frac{Gr_x \cdot Pr^{7/6}}{1 + 0,494 \cdot Pr^{2/3}} \right)^{2/5}$
 - $\overline{Nu} = 0,021 (Ra_{x=L})^{2/5}$

Comment calculer h ? résumé

- Préciser les conditions géométriques du problème d'échange par convection (écoulement le long d'une surface plane / sphère / cylindre / ..., interne / externe, diamètre, longueur, ...)
- Préciser une température de référence et déterminer les propriétés thermophysiques du fluide à cette température (masse volumique, capacité calorifique, ...)
- Prise en compte du type de convection :
 - Calculer le nombre de Reynolds pour déterminer le type d'écoulement en convection forcée.
 - Calculer le nombre de Rayleigh en convection naturelle.
- Calculer le nombre de Nusselt à partir des corrélations expérimentales.
- Calculer h à partir du nombre de Nusselt.

Ce qu'il faut retenir

- **Théorie de la convection :**
 - Loi linéaire et empirique de Newton qui dépend du coefficient de convection h .
 - La convection ne se produit qu'à proximité de la surface d'échange : notion de sous couche thermique.
 - Calcul de h :
 - Exprimer h à partir du nombre de Nusselt Nu .
 - Trouver la bonne corrélation exp pour déterminer Nu . Cela dépend de :
 - La géométrie du système
 - Le type de convection : forcée, naturelle (et mixte)
 - Le type d'écoulement : laminaire, turbulent (et transitoire)
- **Méthode des résistances thermiques :**
 - Résistance thermique de convection définissable à partir de la loi de Newton.
 - Combinable avec les résistances thermiques de conduction lors de processus convecto-conductifs.

3. Convection

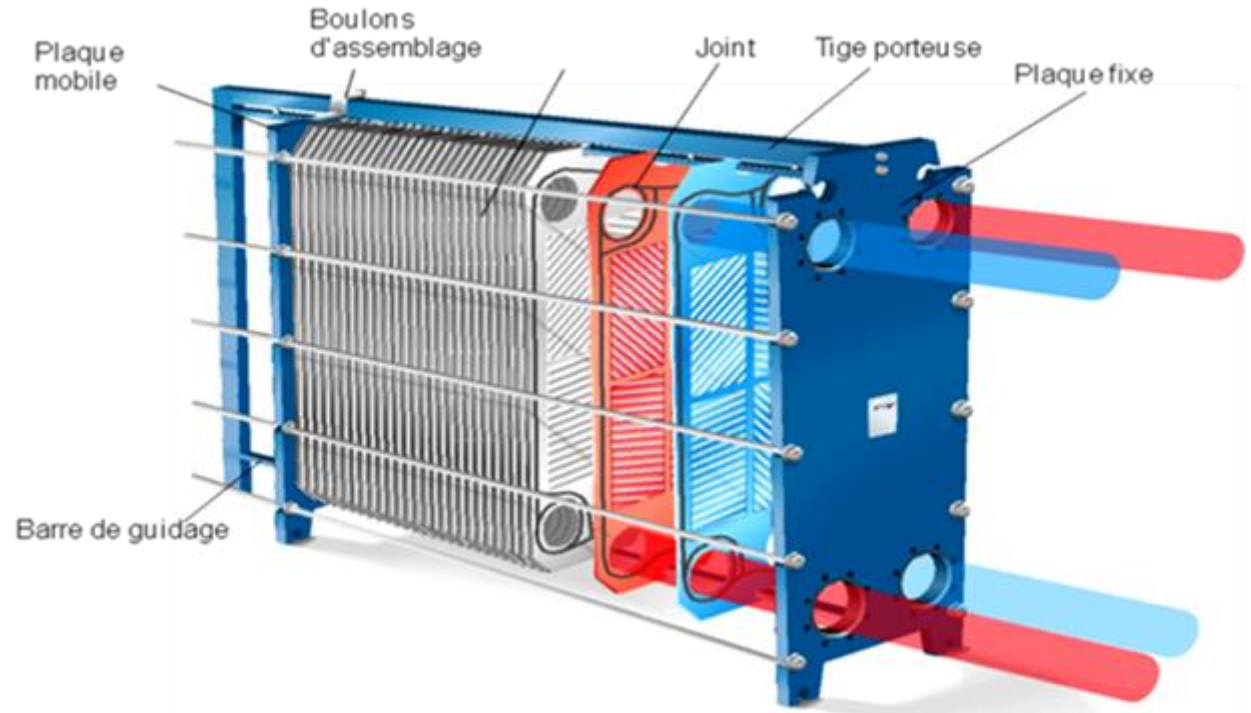
Ce qu'il faut retenir

Nombre de Nusselt	$Nu = \frac{hl}{\lambda}$	h : coefficient de convection l : longueur caractéristique λ : conductivité thermique du fluide	Nu traduit la qualité de l'échange thermique : une augmentation de ce nombre traduit une contribution importante de l'écoulement sur l'échange de chaleur avec la paroi
Nombre de Prandtl	$Pr = \frac{\nu}{a}$	ν : viscosité cinématique a : diffusivité thermique du fluide	Pr compare l'aptitude du fluide à diffuser la quantité de mouvement par le biais de sa viscosité à son aptitude à diffuser la chaleur par le biais de sa diffusivité thermique
Nombre de Reynolds	$Re = \frac{Ud}{\nu}$	U vitesse moyenne de l'écoulement, d dimension caractéristique et ν viscosité cinématique du fluide	
Nombre de Péclet	$Pe = \frac{Ud}{\alpha}$	U vitesse moyenne de l'écoulement, d dimension caractéristique et $\alpha = \frac{\nu C_p}{\lambda}$ diffusivité thermique du fluide	une valeur élevée de Pe traduit une distorsion importante du champ de température due à l'écoulement par rapport à ce qu'il serait si seule la diffusion était présente
Nombre de Grashof	$Gr = \frac{g\beta\Delta Tl^3}{\nu^2}$	β coefficient de dilatabilité du fluide, l dimension caractéristique, g gravité et ν viscosité cinématique du fluide	une augmentation de Gr traduit une augmentation de l'intensité de la convection naturelle
Nombre de Rayleigh	$Ra = \frac{g\beta\Delta Tl^3}{\nu a}$	ν viscosité cinématique, a diffusivité thermique du fluide	$Ra = Gr.Pr$ pour de l'air ou des fluides de nombre de Prandtl proche de l'unité, Ra et Gr sont très proches
Nombre de Richardson	$Ri = \frac{g\beta\Delta Tl}{U^2}$		en convection mixte, $Ri \gg 1$ traduit l'importance de la convection naturelle par rapport à la convection forcée

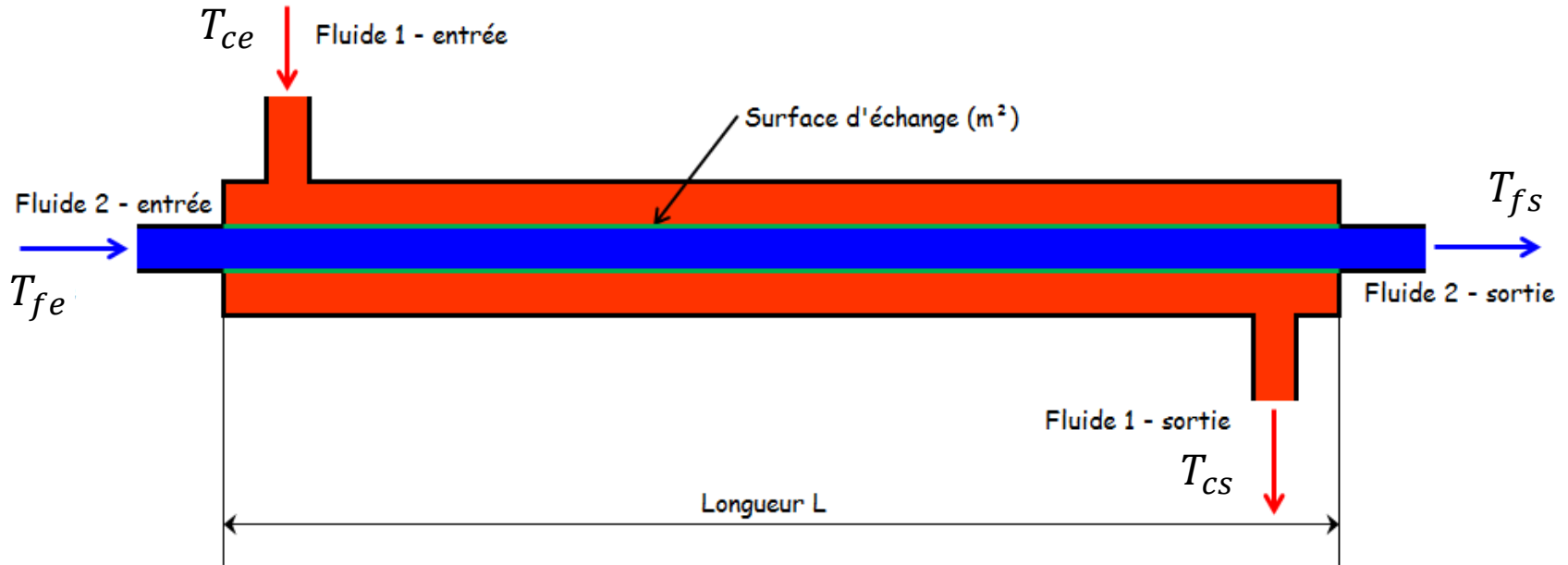
4. Application aux échangeurs de chaleur

4. Echangeur de chaleur

Qu'est-ce qu'un échangeur de chaleur ?

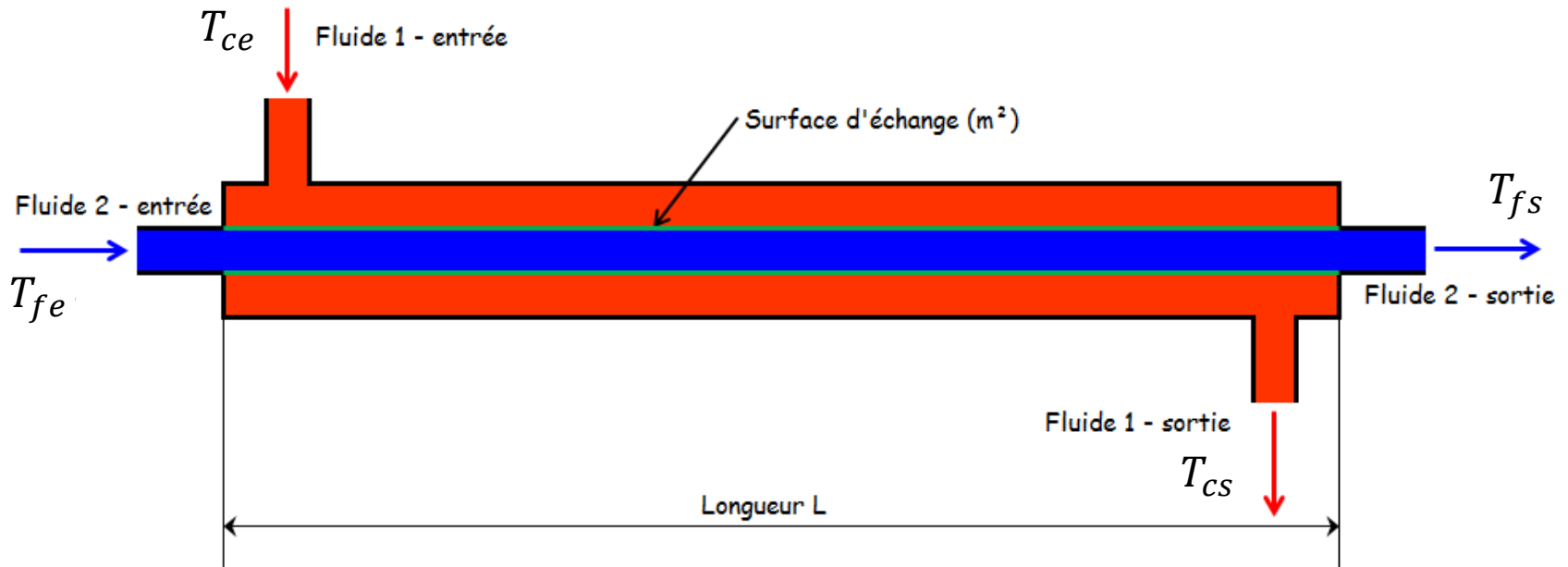


Echangeur de chaleur co-courant / contre-courant



$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi = \dot{m}_c C_{pc} (T_{cs} - T_{ce}) \\ \Phi = \dot{m}_f C_{pf} (T_{fs} - T_{fe}) \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{\dot{m}_c C_{pc} (T_{cs} - T_{ce}) = \dot{m}_f C_{pf} (T_{fs} - T_{fe})} \quad (1)$$

Echangeur de chaleur co-courant / contre-courant



A une distance donnée x sur l'échangeur :

$$d\Phi = k(T_c - T_f)dS \quad (2)$$

avec k coefficient d'échange global incluant :

- échange fluides-parois
- conduction
- échange fluides-parois

Conservation d'énergie entre les 2 fluides :

$$d\Phi = \dot{m}_c C_{PC} dT_c = \dot{m}_F C_{PF} dT_f \quad (3)$$

Application : échangeur de chaleur co-courant / contre-courant

On trouve la formule permettant de calculer le flux thermique global (appelé **méthode DTLM**)

$$\Phi = k \cdot S \cdot \Delta T_{LM} \quad \text{avec} \quad \Delta T_{LM} = \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\ln \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}}$$

	ΔT_1	ΔT_2
Co-courant	$T_{ce} - T_{fe}$	$T_{cs} - T_{fs}$
Contre-courant	$T_{ce} - T_{fs}$	$T_{cs} - T_{fe}$

Avec cette méthode, on a besoin des 4 pour calculer Φ .

Application : échangeur de chaleur co-courant / contre-courant

Autre méthode : méthode du **NUT (Nombre d'Unités de Transfert)**

- Elle repose sur la **définition de l'efficacité** :

$$E = \frac{\Phi_{réel}}{\Phi_{max}} = \frac{\dot{m}_c \cdot c_{pc} \cdot (T_{ce} - T_{cs})}{(\dot{m} \cdot c_p)_{min} \cdot (T_{ce} - T_{fe})} = \frac{\dot{m}_f \cdot c_{pf} \cdot (T_{fs} - T_{fe})}{(\dot{m} \cdot c_p)_{min} \cdot (T_{ce} - T_{fe})}$$

- **Méthode de calcul** :

1. L'efficacité dépend de 2 paramètres :

- Le rapport de déséquilibre : $R = \frac{(\dot{m} \cdot c_p)_{min}}{(\dot{m} \cdot c_p)_{max}}$

- Le NUT : $NUT = \frac{kS}{(\dot{m} \cdot c_p)_{min}}$

2. Utiliser des abaques pour obtenir le flux

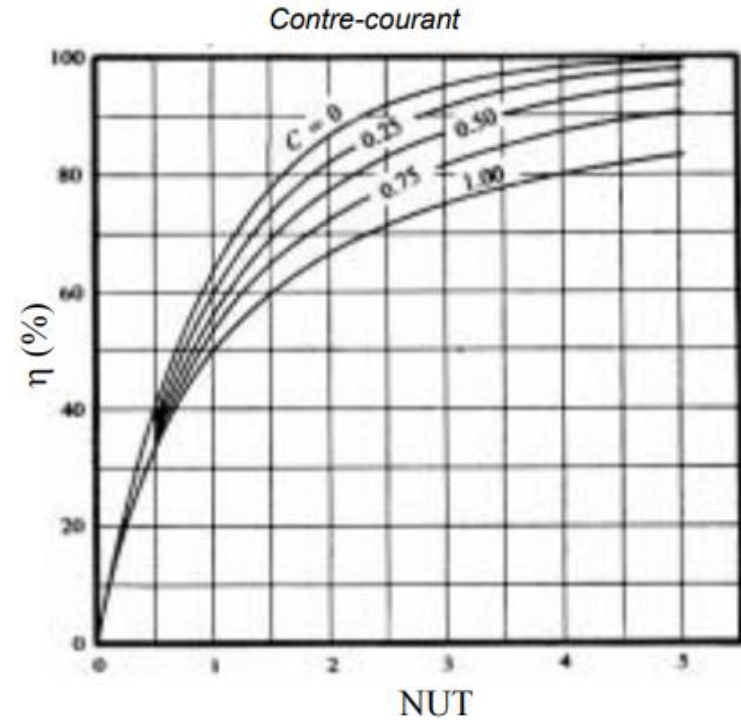
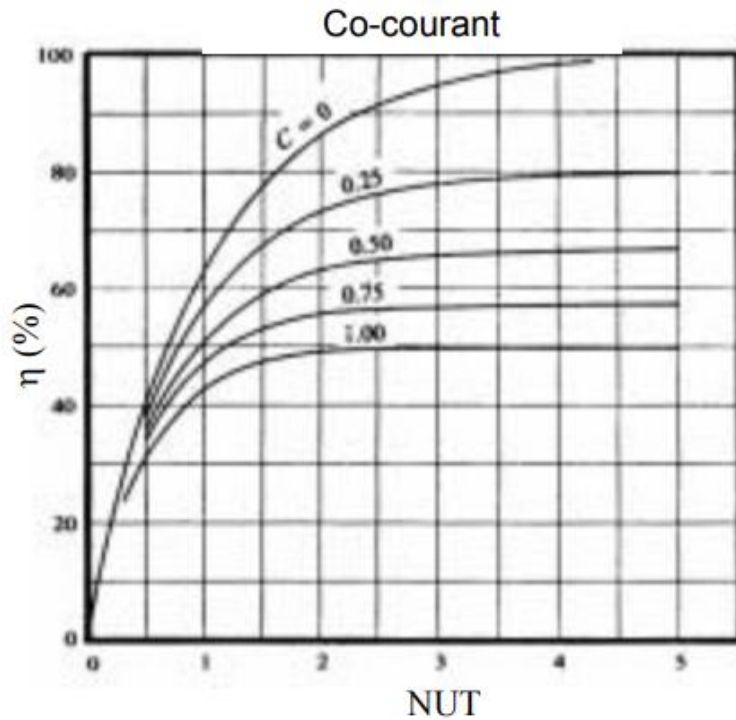
à partir de R et du NUT : $\Phi_{réel} = E \cdot \Phi_{max}$

**Avec méthode, on a
seulement besoin des 2
températures d'entrée de
l'échangeur.**

4. Echangeur de chaleur

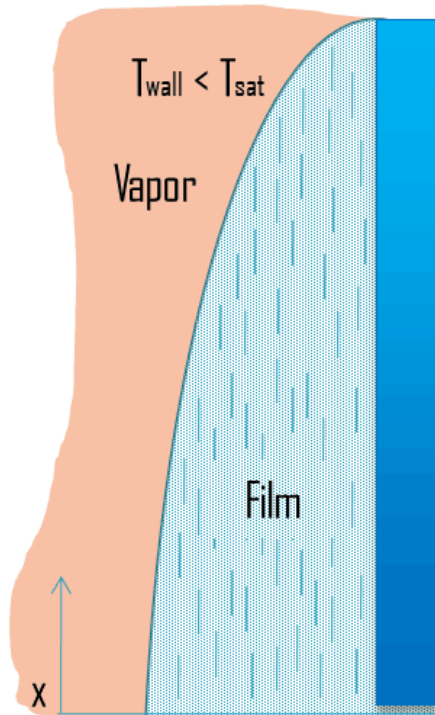
Application : échangeur de chaleur co-courant / contre-courant

Autre méthode : méthode du NUT (Nombre d'Unités de Transfert)



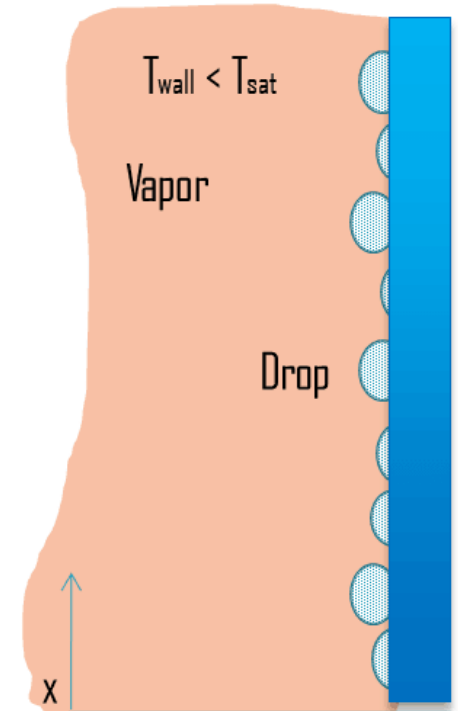
Convection en écoulement diphasique : cas de la condensation

Condensation en film continu



Le film crée une séparation car les liquides ont une conductivité thermique faible
→ Dégradation de l'échange

Condensation en gouttelettes



Taille des gouttelettes augmentent durant le processus puis se détachent en libérant la surface.
→ Mode recherché par les industriels.
→ Difficile à obtenir en pratique.

Convection en écoulement diphasique : cas de la condensation

Expression de h dans le cas d'un écoulement sur une paroi verticale

- Nombre de Reynolds critique pour le film continu :

$$Re = \frac{\rho_L v_L \delta_L}{\mu_L} = 1\,800$$

- Film laminaire :

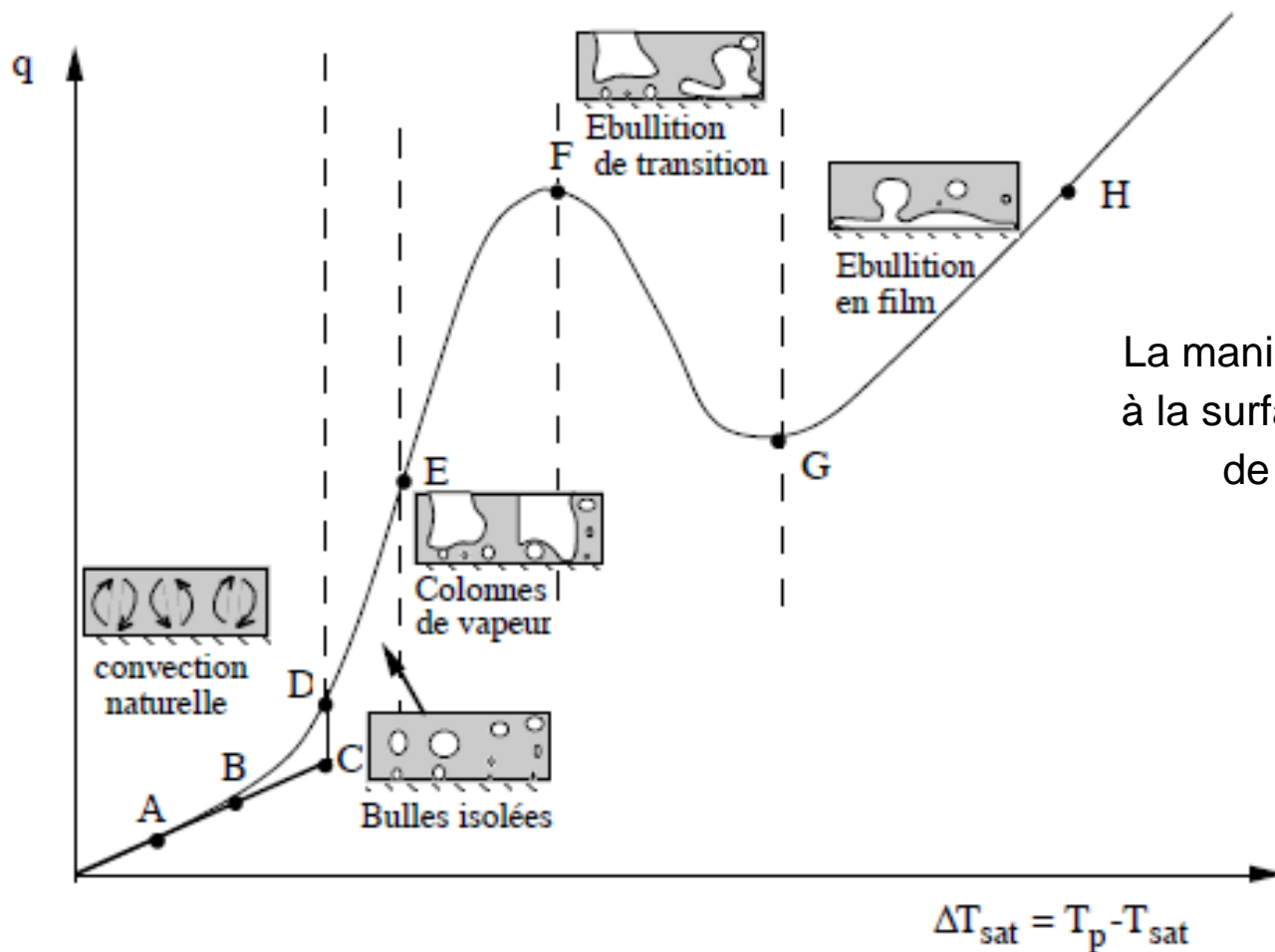
$$\bar{h} = 0,943 \left(\frac{g \rho_L (\rho_L - \rho_V) \lambda_L^3 \Delta H}{\mu_L (T_{sat} - T_s) L} \right)^{1/4}$$

- Film turbulent :

$$\bar{h} = \frac{\lambda_L}{(v_L^2/g)} \cdot \frac{Re}{8\,750 + 58 Pr^{-0,5} (Re^{0,75} - 253)}$$

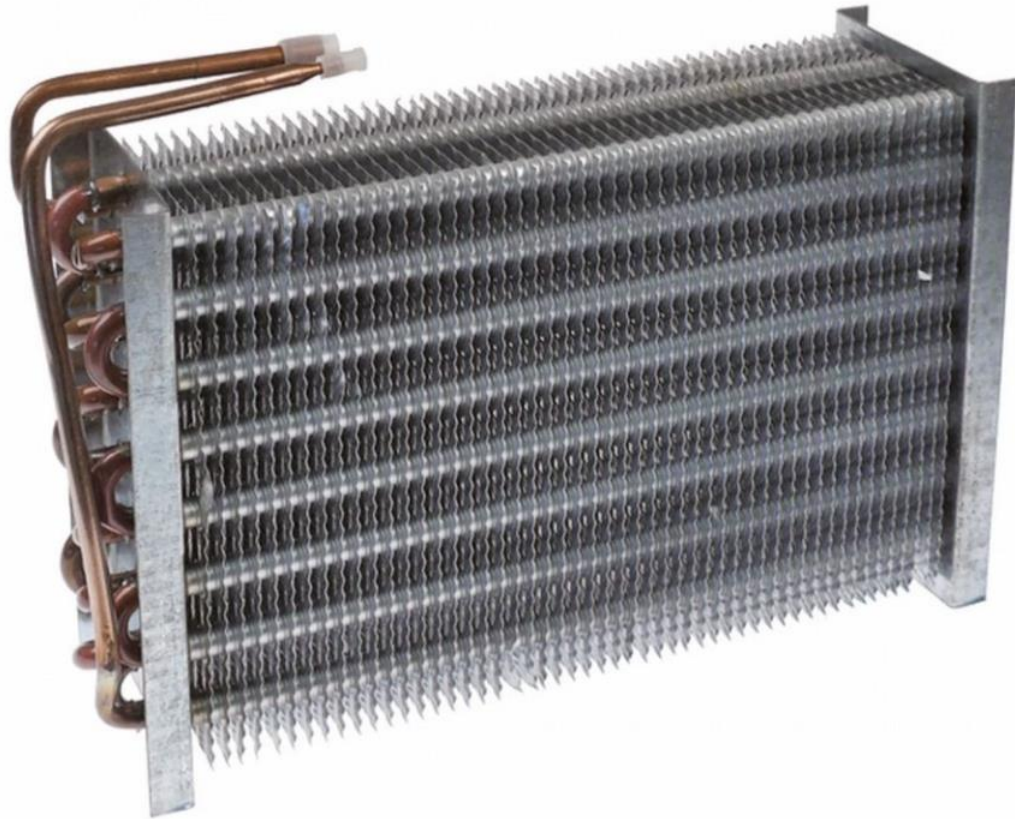
- g : constante de pesanteur
- ρ_L et ρ_V : masse volumique de la phase liquide et vapeur
- v_L : vitesse moyenne de la phase liquide
- δ_L : épaisseur du film liquide
- λ_L : conductivité thermique de la phase liquide
- μ_L : viscosité dynamique de la phase liquide
- L : longueur de la paroi
- T_{sat} : température de saturation
- T_s : température de la paroi
- ΔH : différence d'enthalpie (incluant la chaleur latente de vaporisation)

Convection en écoulement diphasique : cas de l'évaporation / ébullition

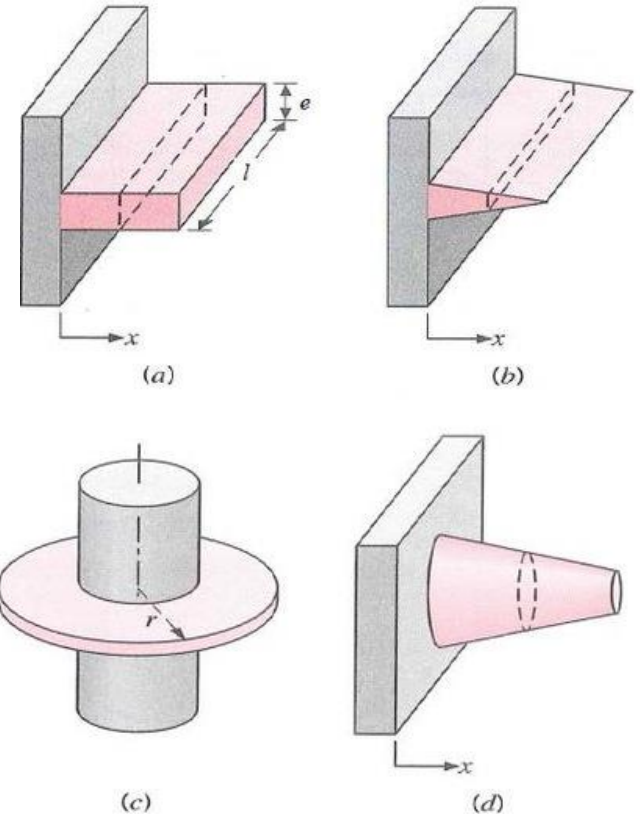


La manière dont la vapeur se forme à la surface dépend de la différence de température $T_s - T_{sat}$.

Principe des ailettes sur un échangeur à air

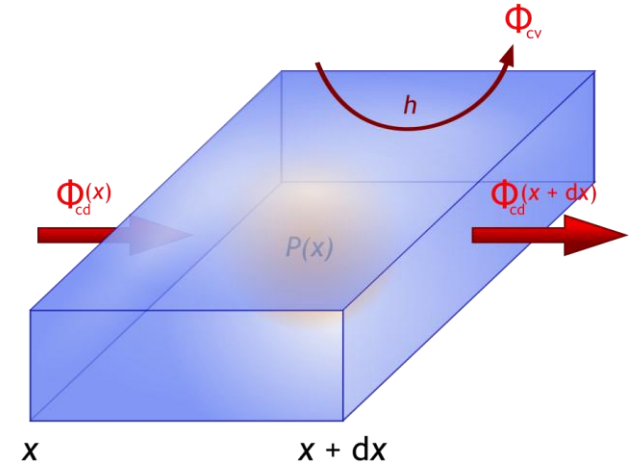
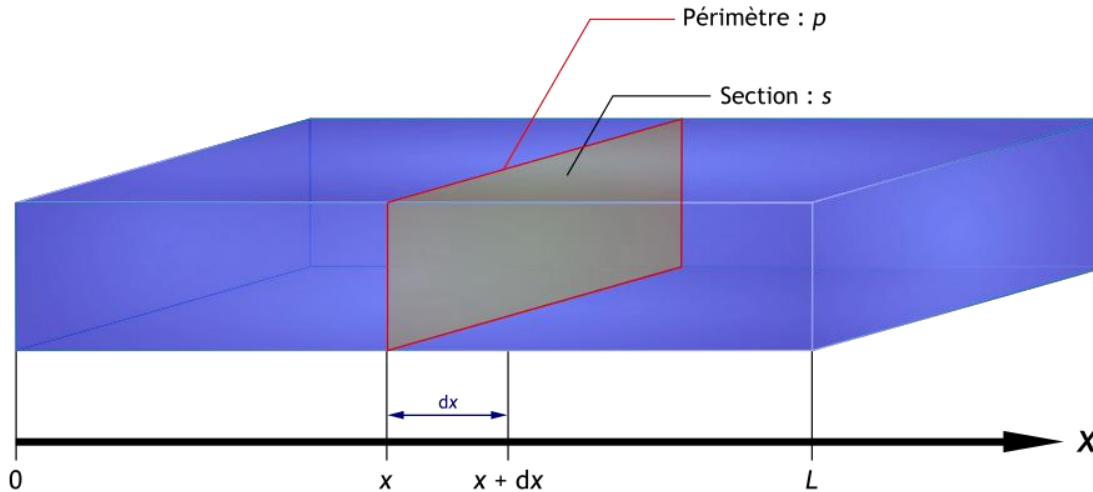


Quelques exemples d'ailettes de forme différente



Principe des ailettes sur un échangeur à air

On suppose que l'ailette est thermiquement mince selon y et z ($Bi \ll 1$).



Bilan d'énergie :

Bilan conductif = Perte convective

$$\Phi_x - \Phi_{x+dx} = h \cdot p dx \cdot (T_x - T_\infty)$$

Principe des ailettes sur un échangeur à air

Equation de l'ailette :
$$\frac{d^2T(x)}{dx^2} - \left(\frac{hp}{ks}\right)^2 \cdot T(x) = 0$$

Résolution :
$$T(x) = (T_0 - T_\infty) \cosh(kx) - \frac{(T_0 - T_\infty) \sinh(kL)}{\cosh(kL)} \cdot \sinh(kx)$$

Simplification : ailette infiniment longue : $L \rightarrow +\infty$

$$T(x) = (T_0 - T_\infty) \exp(-kx)$$

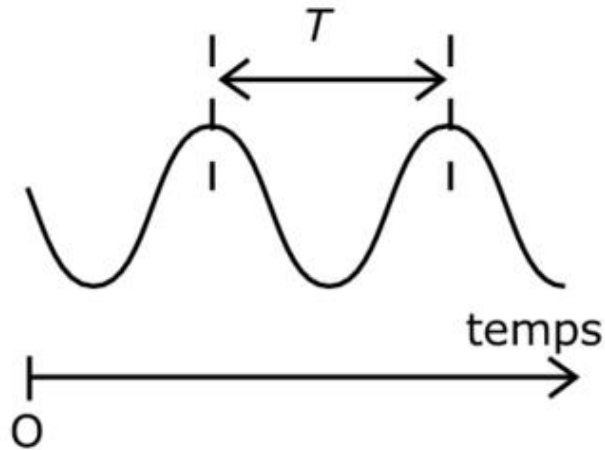
Flux thermique par conduction : $\Phi_{cd} = \lambda S k (T_0 - T_\infty)$

Correspondant à une résistance thermique : $R_{th} = \frac{1}{\lambda S k}$

Efficacité d'une ailette :
$$\epsilon = \frac{\Phi_{avec\ ailette}}{\Phi_{sans\ ailette}} = \frac{\lambda k}{h}$$

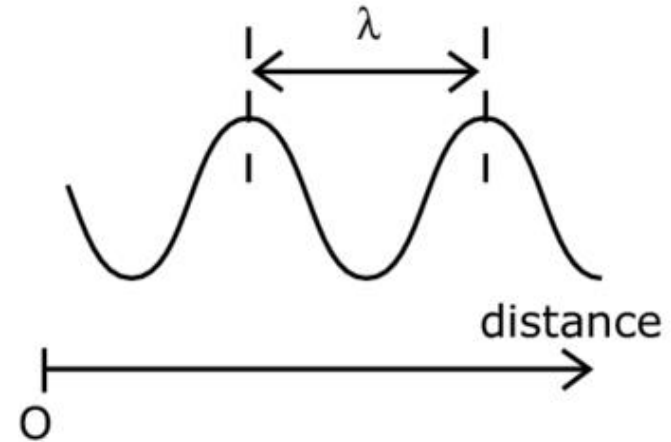
5. Rayonnement

5.1) Notions générales sur le rayonnement



Périodicité temporelle :

- Période : T (en s)
- Fréquence : $\nu = 1/T$ (en Hz = s⁻¹)



Périodicité spatiale :

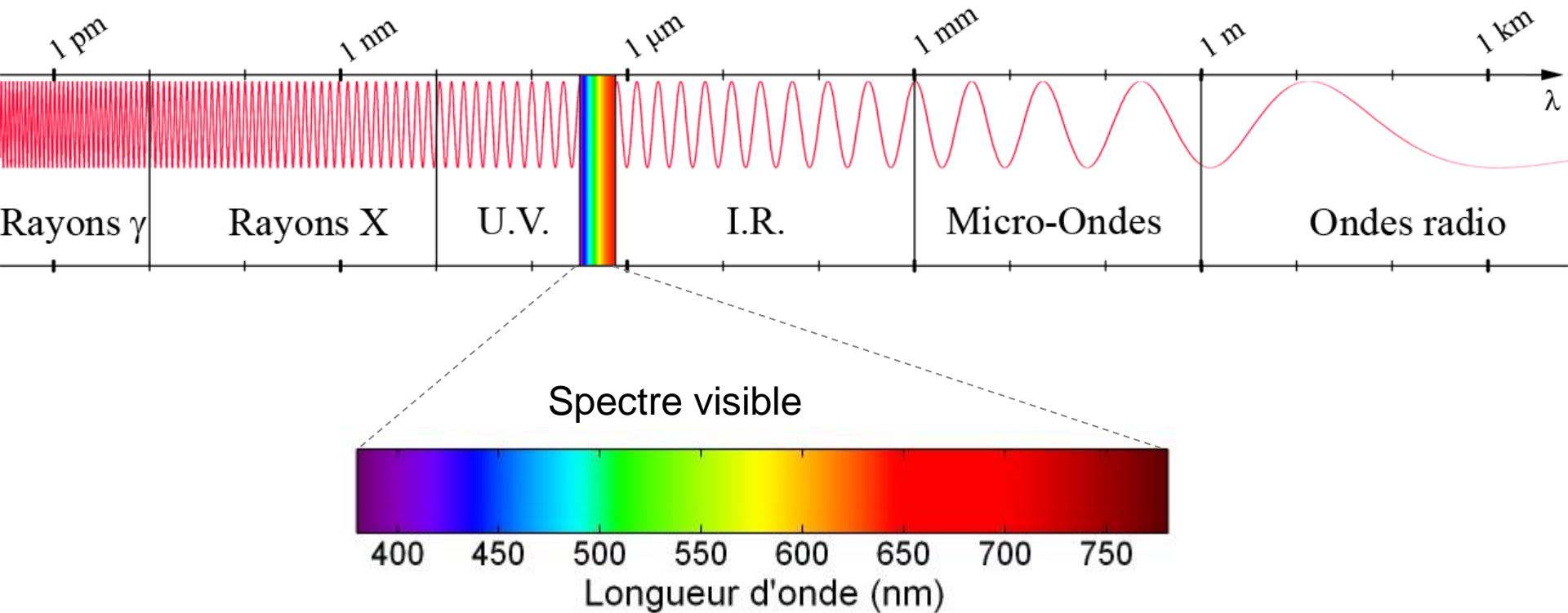
- Période = Longueur d'onde
 $\lambda = cT = c/\nu$ (en m)

Remarques :

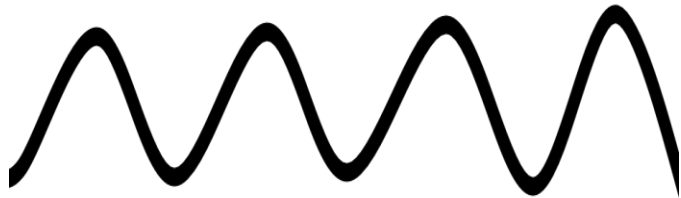
- Par la suite, on ne travaillera pas avec la période temporelle T (en s) afin d'éviter les ambiguïtés avec la température qui sera notée également T . (en K).
- La relation entre longueur d'onde et fréquence temporelle n'est valable que dans le vide. Dans un milieu, il faut prendre en compte l'indice de réfraction n du milieu : $\lambda = cT/n = c/(\nu n)$

5.1) Notions générales sur le rayonnement et les ondes

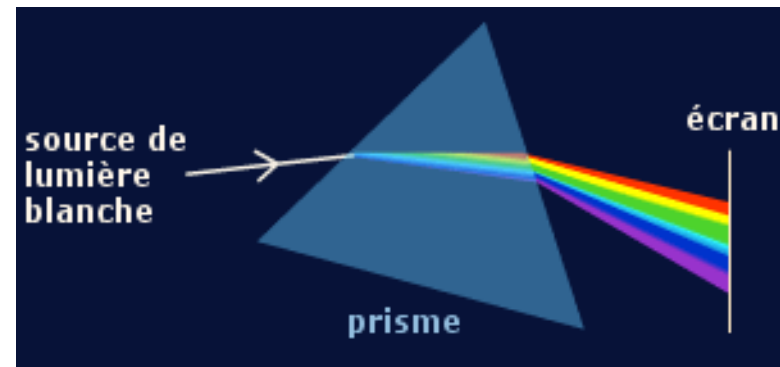
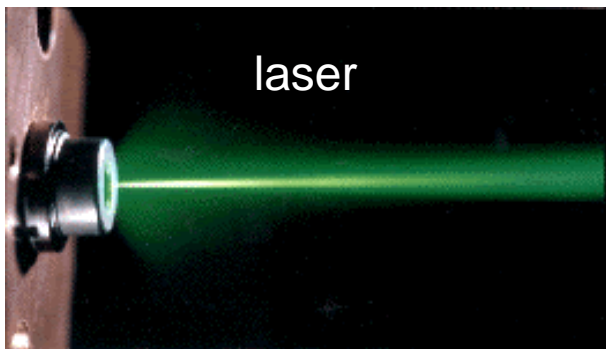
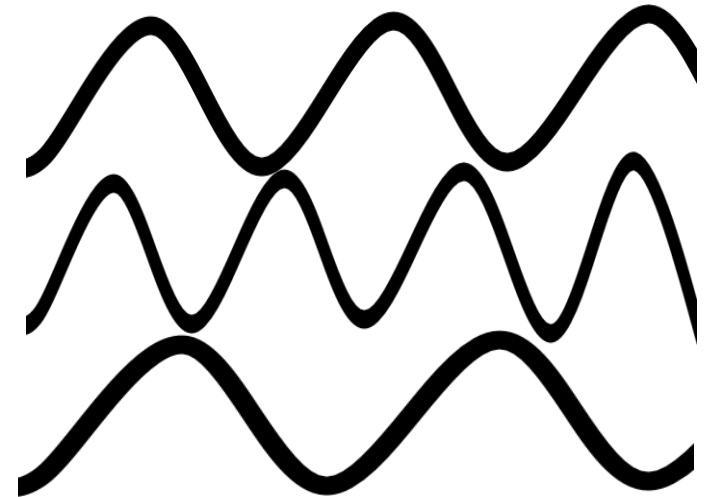
Gamme de longueur d'onde



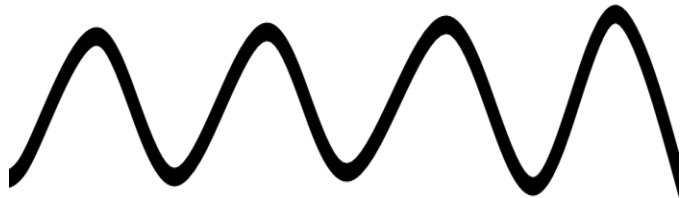
5.1) Notions générales sur le rayonnement



Faisceau
monochromatique
VS
Faisceau
polychromatique

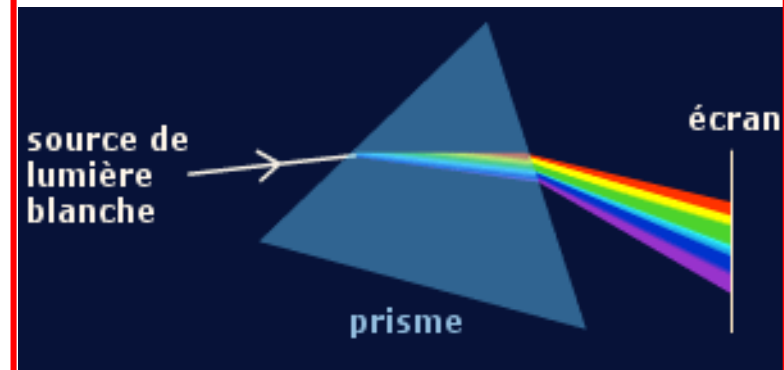
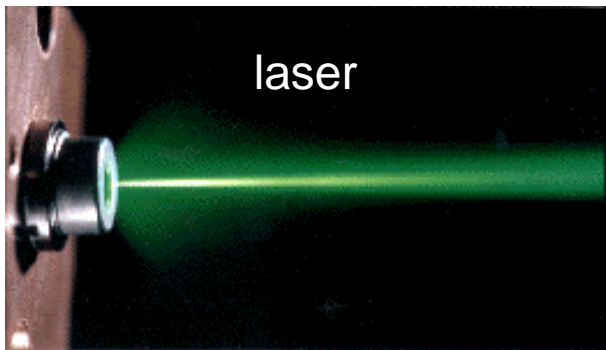
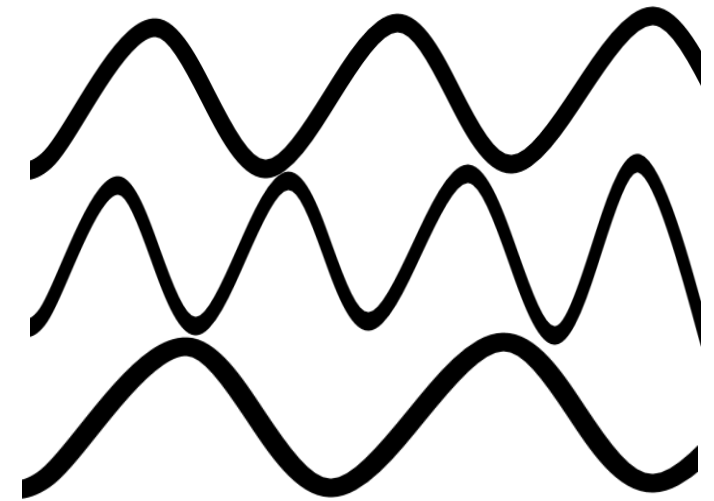


5.1) Notions générales sur le rayonnement



Faisceau
monochromatique
VS
Faisceau
polychromatique

Cas du rayonnement thermique



5.1) Notions générales sur le rayonnement

Pour toute observable énergétique G ,
on peut définir :

- **Grandeur spectrale :**

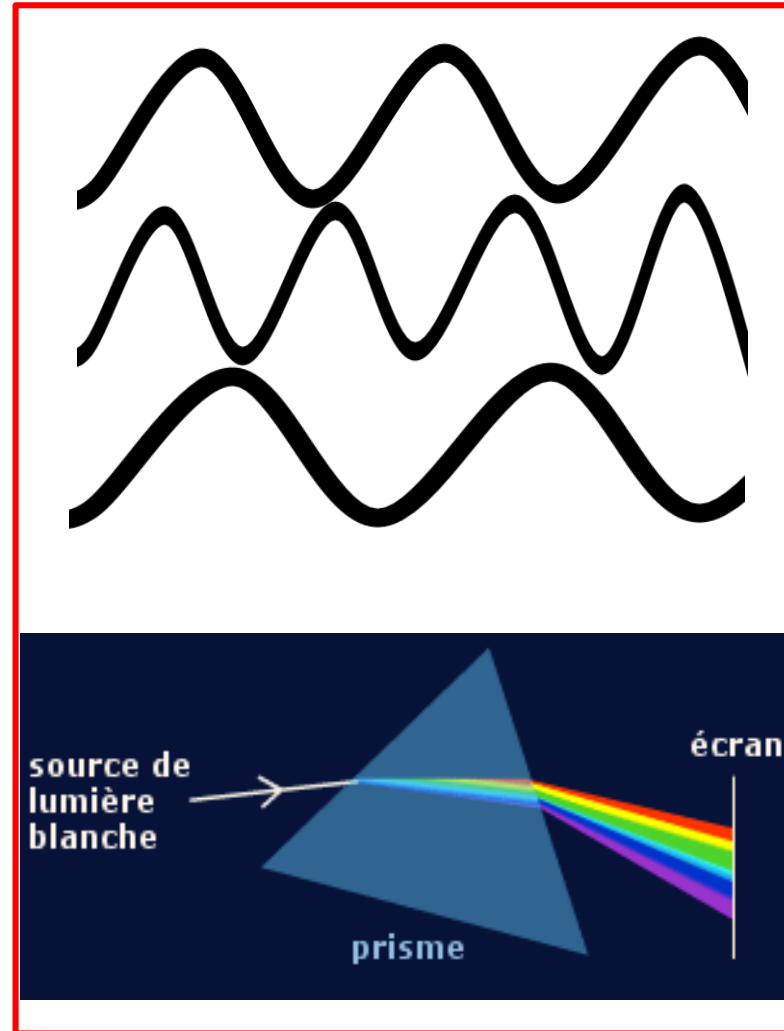
$$G_{\lambda}(\lambda) = \frac{dG(\lambda)}{d\lambda} \quad \text{ou} \quad G_{\nu}(\nu) = \frac{dG(\nu)}{d\nu}$$

$$\text{Lien entre les deux : } \phi_{\lambda} = \left| \frac{d\Phi}{d\lambda} \right| = \left| \frac{d\Phi}{d\nu} \right| \left| \frac{d\nu}{d\lambda} \right| = \frac{\nu^2}{c} \phi_{\nu}$$

- **Grandeur totale :**

$$G = \int_0^{+\infty} G_{\lambda} d\lambda = \int_0^{+\infty} G_{\nu} d\nu$$

Cas du rayonnement thermique



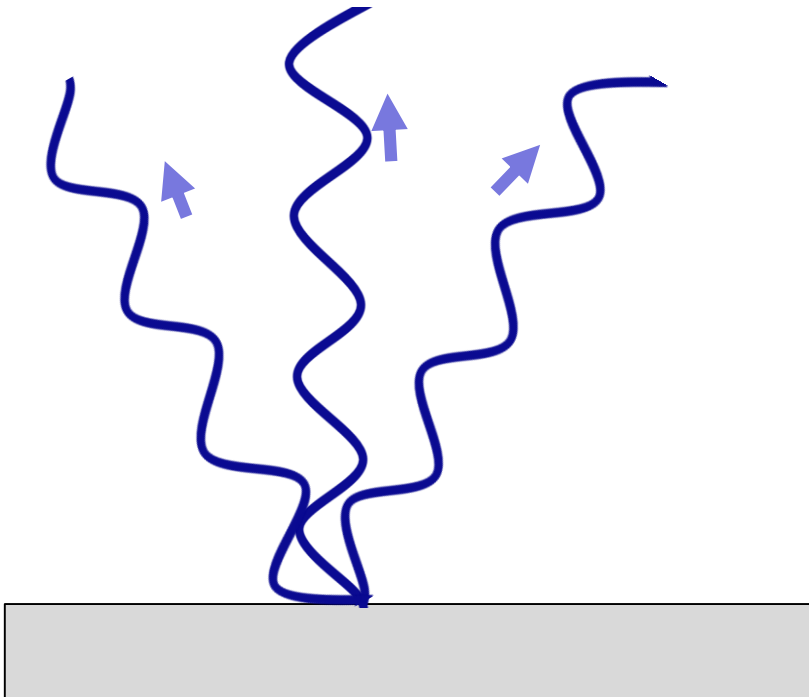
5.1) Notions générales sur le rayonnement et les ondes

Grandeur énergétique associée au rayonnement :

Nom	Notation	Unité	Définition	Schéma
Emittance ou exitance ou éclairage	M	$W.m^{-2}$	Flux énergétique émis (dans toutes les directions) par unité de surface réelle $M = \frac{d^2\Phi}{d^2S}$	
Intensité dans la direction \vec{u}	$I(\vec{u})$	$W.sr^{-1}$	Flux énergétique émis par unité d'angle solide autour de cette direction \vec{u} $I(\vec{u}) = \frac{d^2\Phi}{d^2\Omega(\vec{u})}$	
Luminance	L	$W.m^{-2}.sr^{-1}$	Flux énergétique émis par unité d'angle solide et par unité de surface normale à la direction d'émission $L = \frac{d^4\Phi}{d^2\Sigma d^2\Omega}$	

5.2) Emission et réception

Emission

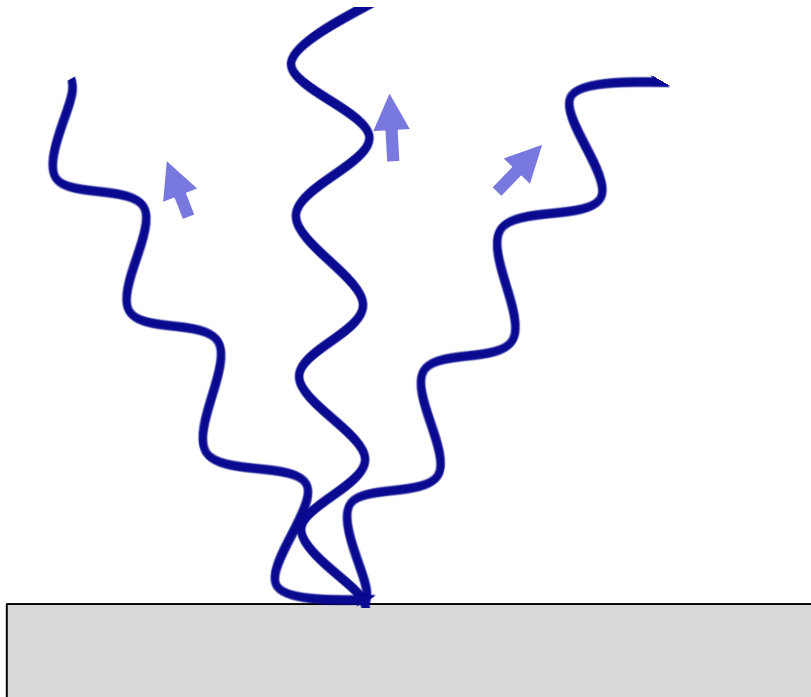


Comment évolue un système radiatif qui est isolé de tout ?

- Le système perd son énergie suite au rayonnement et sa température diminue.
- Il s'arrête de rayonner quand T atteint 0 K .

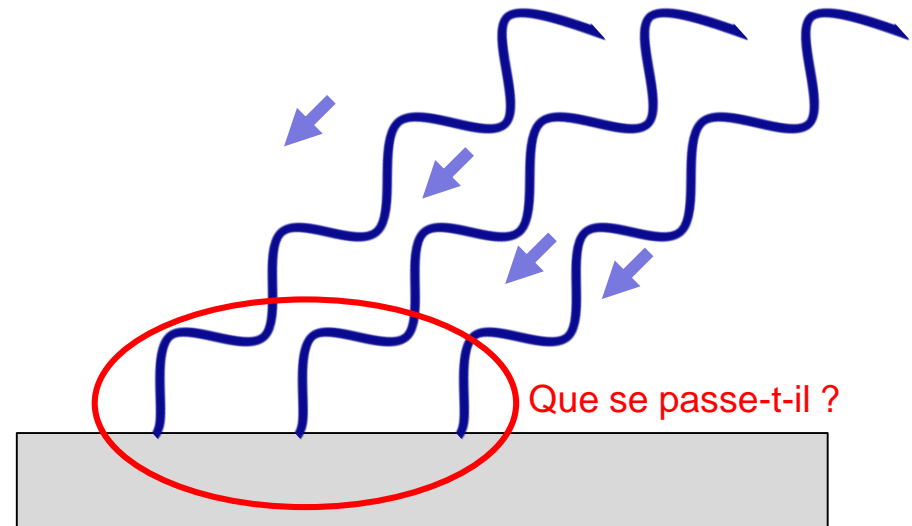
5.2) Emission et réception

Emission

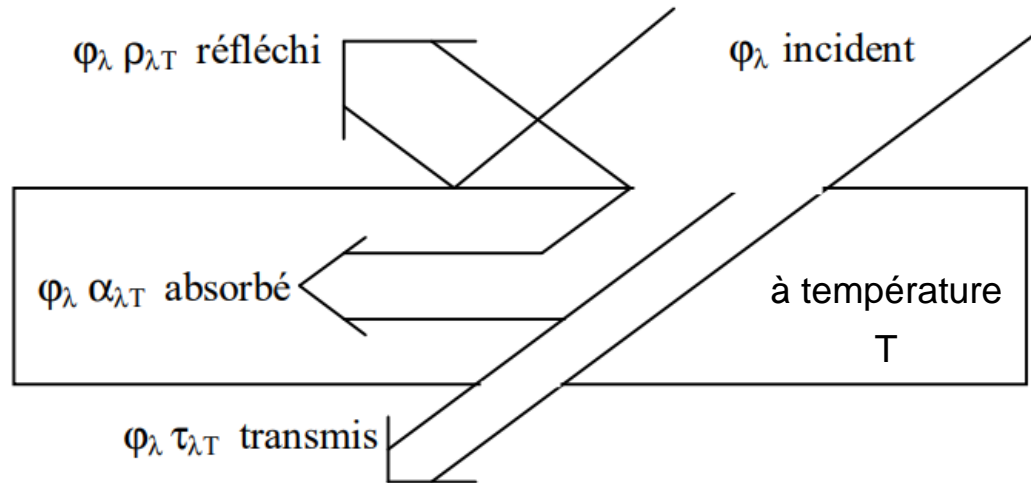


+

Réception



5.2) Emission et réception



Définition des coefficients spectraux :

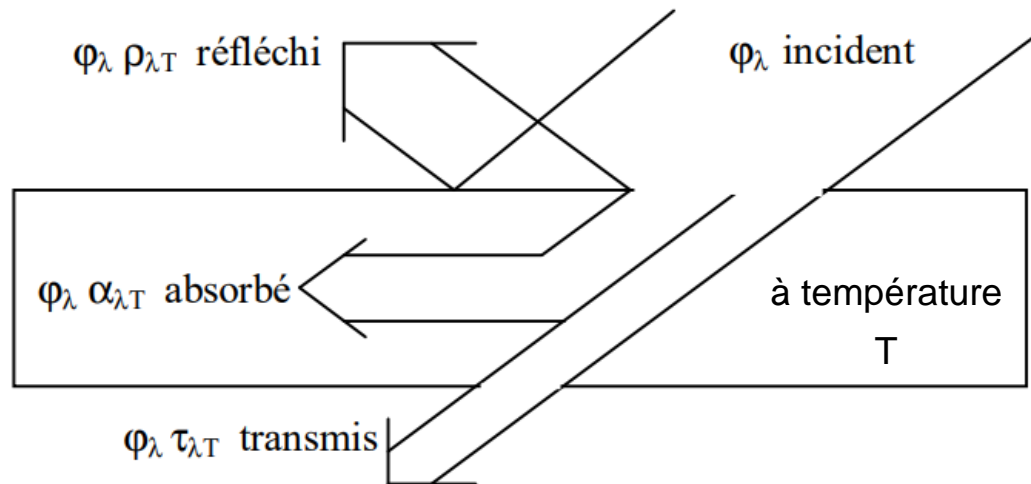
- de transmission : $\rho_{\lambda,T} = \frac{\phi_r}{\phi_i}$
 - d'absorption : $\alpha_{\lambda,T} = \frac{\phi_a}{\phi_i}$
 - de transmission : $\tau_{\lambda,T} = \frac{\phi_t}{\phi_i}$
- } $\in [0; 1]$

Conservation d'énergie :

Incident = réfléchi + absorbé + transmis

$$\rho_\lambda + \alpha_\lambda + \tau_\lambda = 1$$

5.2) Emission et réception



On distingue plusieurs comportements selon les valeurs des coefficients :

- **Matériau opaque** : pas de transmission $\rightarrow \tau = 0$ donc $\alpha + \rho = 1$
- **Surface transparente ou réfléchissante** : pas de réflexion $\rightarrow \rho = 0$ et $\alpha = 0$ et $\tau = 1$
 \rightarrow vrai transparence : le vide
- **Surface semi-transparente** : transparence selon la longueur d'onde (ex : le verre)
- **Corps noir** : tout est absorbé $\rightarrow \alpha = 1$ et $\tau = 0$ et $\rho = 0$

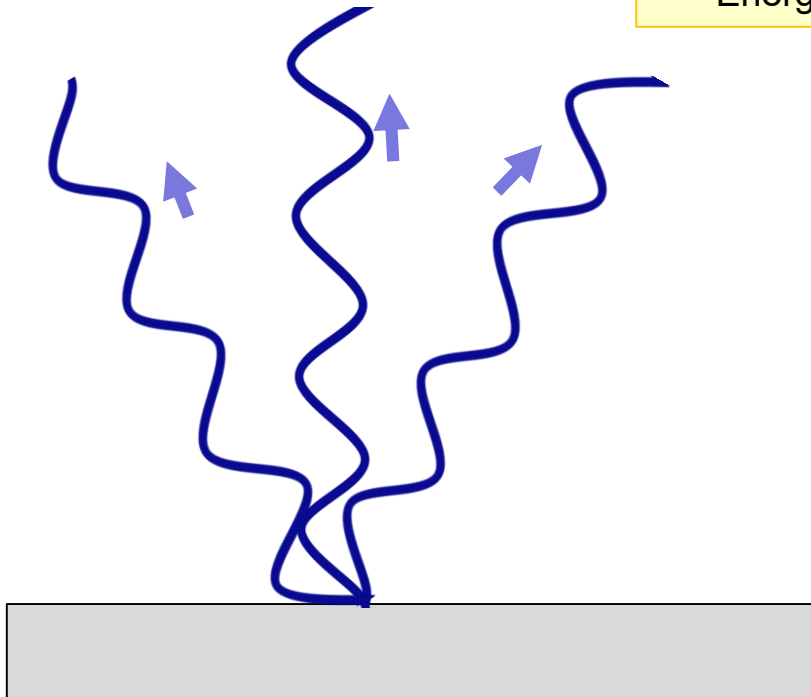
5.2) Emission et réception

$$\text{Energie gagné} = \phi_{\text{émis}} - \phi_{\text{absorbé}}$$

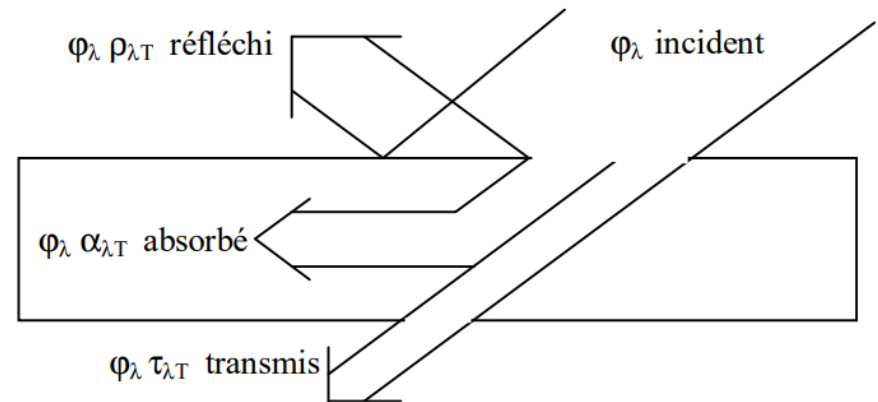
3 cas de figure :

- Energie gagné < 0 : le système perd de l'énergie (T diminue)
- Energie gagné $= 0$: le système est à l'équilibre thermique
- Energie gagné > 0 : le système gagne de l'énergie (T augmente)

Emission

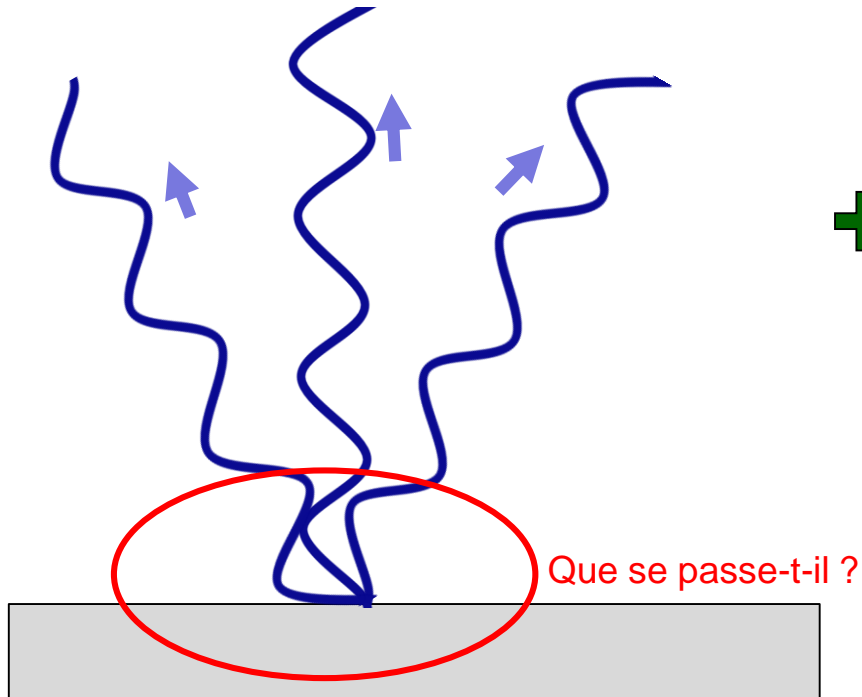


Réception



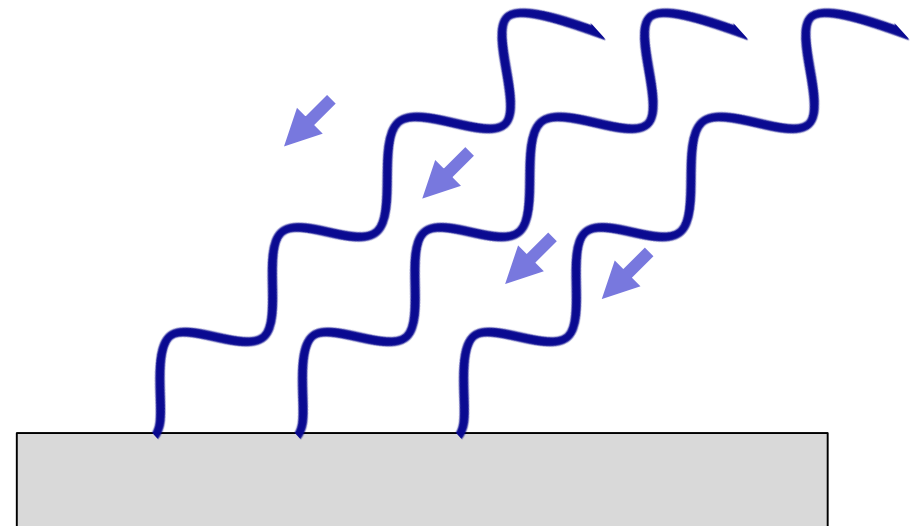
5.2) Emission et réception

Emission



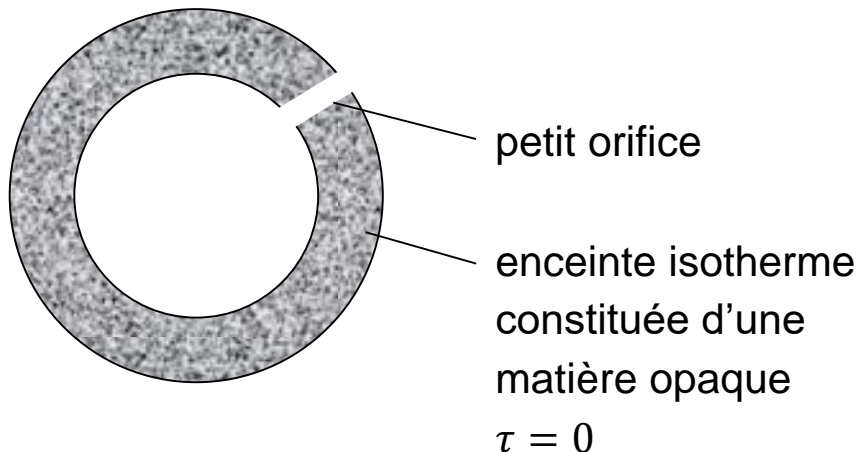
+

Réception



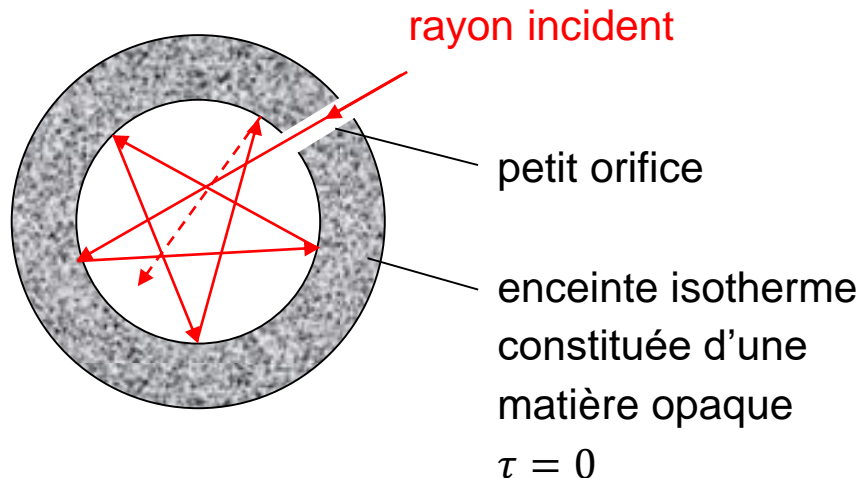
5.3) Théorie du corps noir

- Corps noir = modèle de référence.
Corps réel = corps noir \otimes facteurs correctifs
- **Définition du corps noir** : un corps qui absorbe intégralement le rayonnement incident.
(c'est-à-dire $\forall \lambda a_\lambda = 1$) et qui est à l'équilibre thermique.
- **Modélisation du corps noir** :



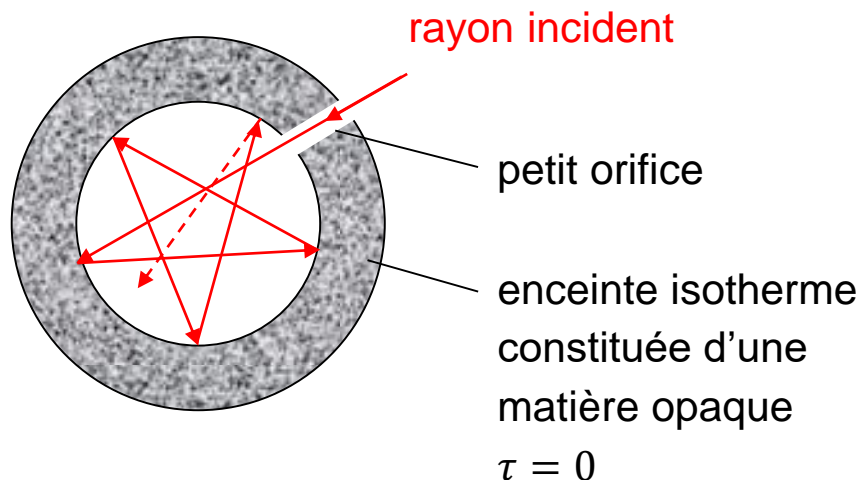
5.3) Théorie du corps noir

- Corps noir = modèle de référence.
Corps réel = corps noir \otimes facteurs correctifs
- **Définition du corps noir** : un corps qui absorbe intégralement le rayonnement incident (c'est-à-dire $\forall \lambda a_\lambda = 1$) et qui est à l'équilibre thermique.
- **Modélisation du corps noir** :



5.3) Théorie du corps noir

- Corps noir = modèle de référence.
Corps réel = corps noir \otimes facteurs correctifs
- **Définition du corps noir** : un corps qui absorbe intégralement le rayonnement incident (c'est-à-dire $\forall \lambda a_\lambda = 1$) et qui est à l'équilibre thermique.
- **Modélisation du corps noir** :



Lien avec la couleur noire ?

- *Couleur noire = absorption totale du spectre visible (pas la totalité du spectre).*
- *Un corps noir n'est pas obligatoirement de couleur noire. Il émet à son tour un rayonnement dans toutes les longueurs d'onde.*

5.3) Théorie du corps noir

Propriétés du corps noir

- Il s'agit d'un **rayonnement d'équilibre** : T ne change pas malgré l'émission de rayonnement.
- Le rayonnement est **indépendant de la nature et de la forme des parois**.
- Le rayonnement est **uniforme** : indépendant du point M considéré.
- Le rayonnement est **isotrope** ou diffus : indépendant d'une direction donnée.
→ le rayonnement suit la loi de Lambert (1760).
- Le rayonnement n'est **pas polarisé**.
- L'émittance spectrale est donnée par une **fonction universelle qui dépend uniquement de la longueur d'onde et de la température** :
 $M_\lambda = M_{\lambda,T}$. **La loi de Planck !**

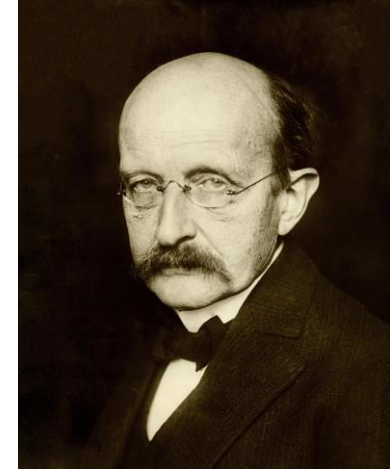


5.3) Théorie du corps noir

Loi de Planck (1900) : le point départ

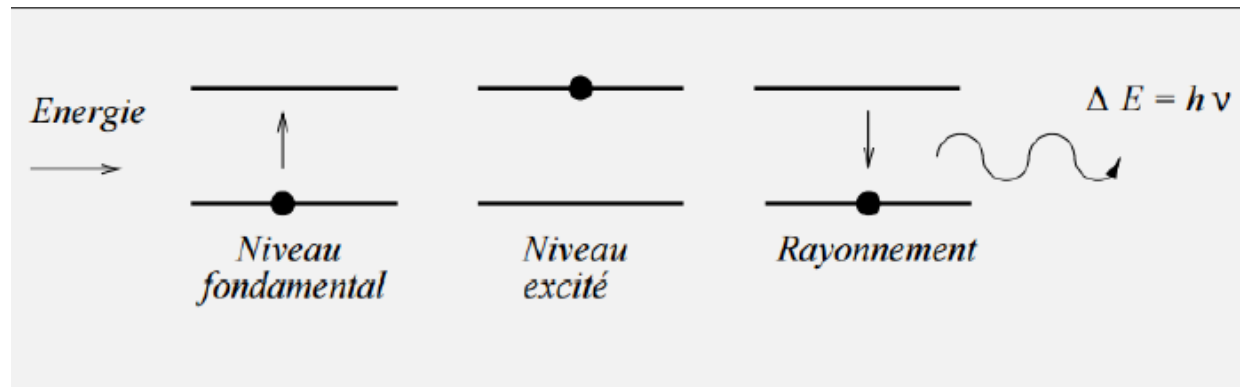
- Assimile le corps noir à une somme d'oscillateurs harmoniques de fréquences différentes.
- L'énergie des ondes est quantifiée et proportionnelle à la fréquence :

$$E_n = n \cdot h \cdot \nu$$



avec :

- n un entier naturel
- h la constante de Planck
 $= 6,62607015 \times 10^{-34}$ J.s
- ν la fréquence de l'onde



5.3) Théorie du corps noir

Loi de Planck (1900) : en fonction de λ

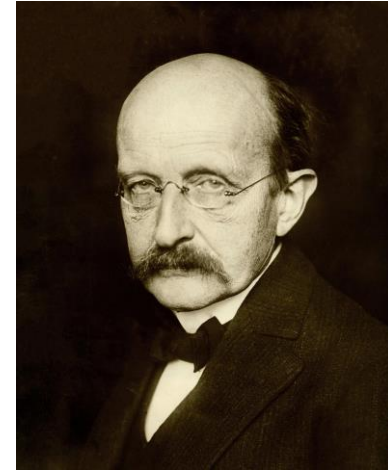
Expression de l'émittance monochromatique du corps noir en fonction de la longueur d'onde λ et de sa température T .

$$M_{\lambda}^0(\lambda, T) = \frac{dM^0}{d\lambda}(\lambda, T) = \frac{C_1}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right) - 1}$$

avec :

- les constantes $C_1 = 2\pi h c^2 \approx 3,74 \times 10^{-16} \text{ W.m}^2$ et $C_2 = \frac{h \cdot c}{k_B} \approx 1,44 \times 10^{-2} \text{ m.K}$
- h la constante de Planck = $6,62607015 \times 10^{-34} \text{ J.s}$
- k_B la constante de Boltzmann $1,380649 \times 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$

Remarque : Les grandeurs relatives au corps noir seront affectées d'un indice supérieur « 0 ».



5.3) Théorie du corps noir

Loi de Planck (1900) : en fonction de ν

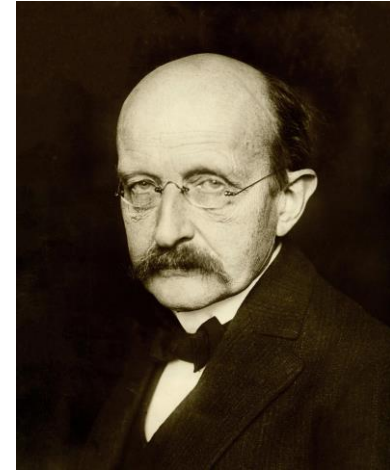
Expression de l'émittance monochromatique du corps noir en fonction de la fréquence ν et de sa température T.

$$M_{\nu}^0(\nu, T) = \frac{dM^0}{d\nu}(\lambda, T) = C_1' \nu^3 \cdot \frac{1}{\exp\left(C_2' \frac{\nu}{T}\right) - 1}$$

avec :

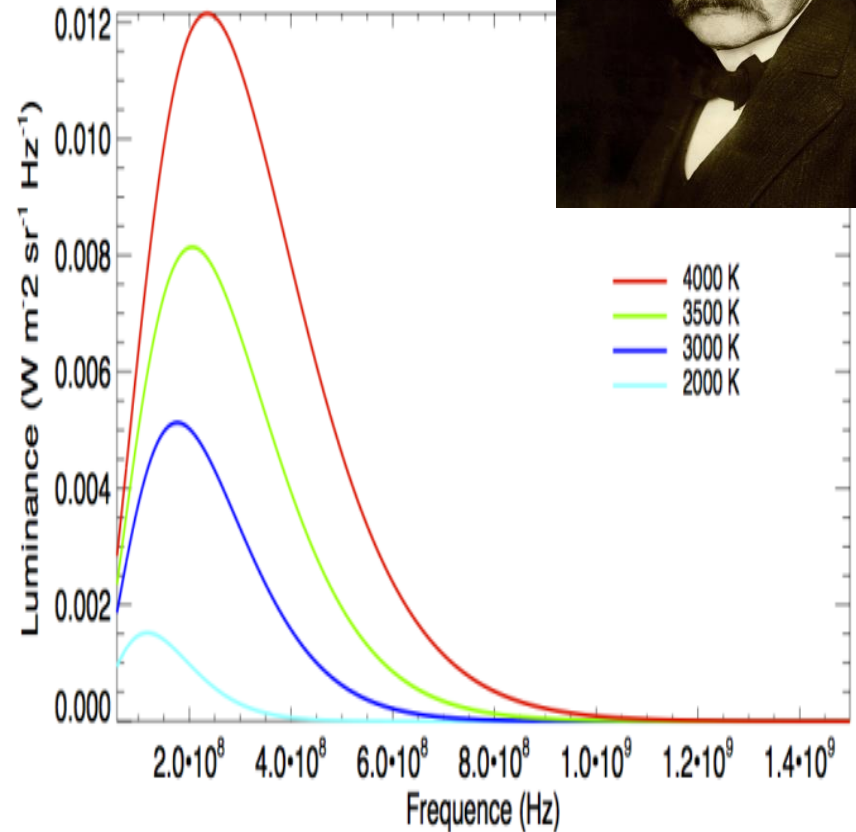
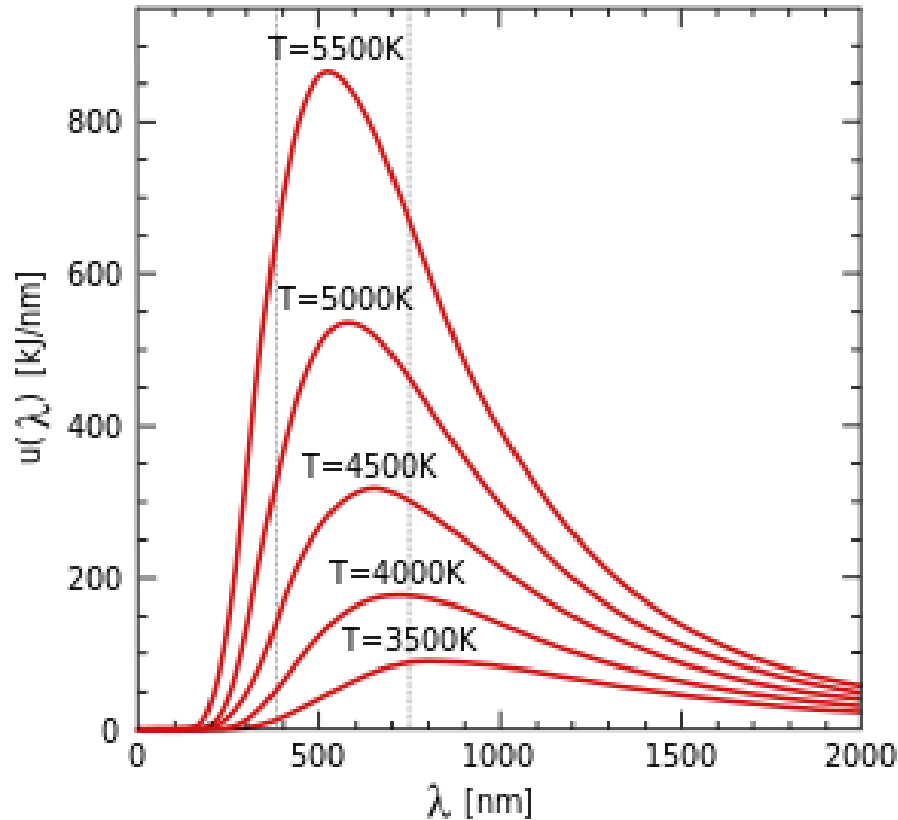
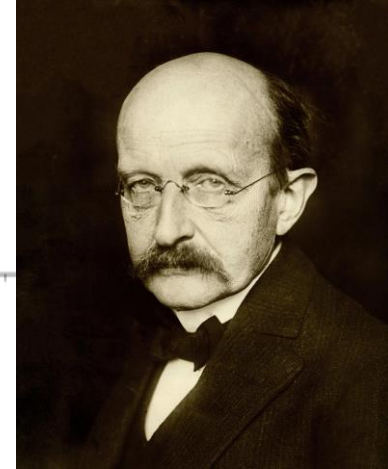
- les constantes $C_1' = \frac{2\pi h}{c^2} \approx 4,63 \times 10^{-50} \text{ J} \cdot \text{s}^3 \cdot \text{m}^{-2}$ et $C_2' = \frac{h}{k_B} \approx 4,80 \times 10^{-11} \text{ s} \cdot \text{K}$
- h la constante de Planck = $6,62607015 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
- k_B la constante de Boltzmann $1,380649 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$

Remarque : Les grandeurs relatives au corps noir seront affectées d'un indice supérieur « o ».



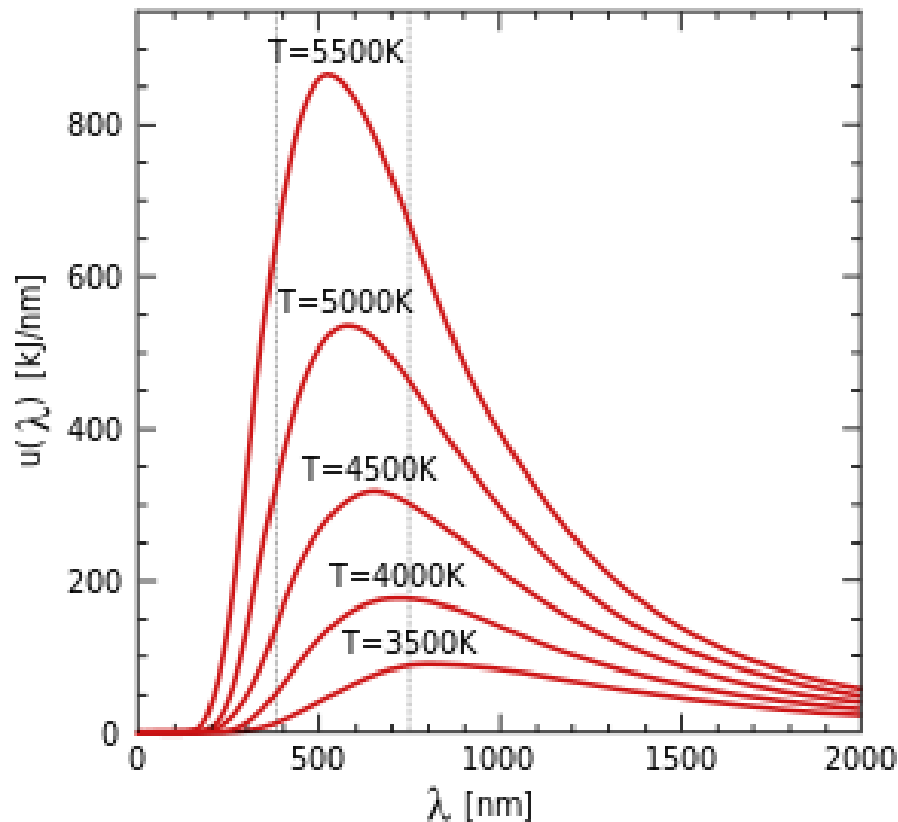
5.3) Théorie du corps noir

Loi de Planck (1900) : le résultat graphique



5.3) Théorie du corps noir

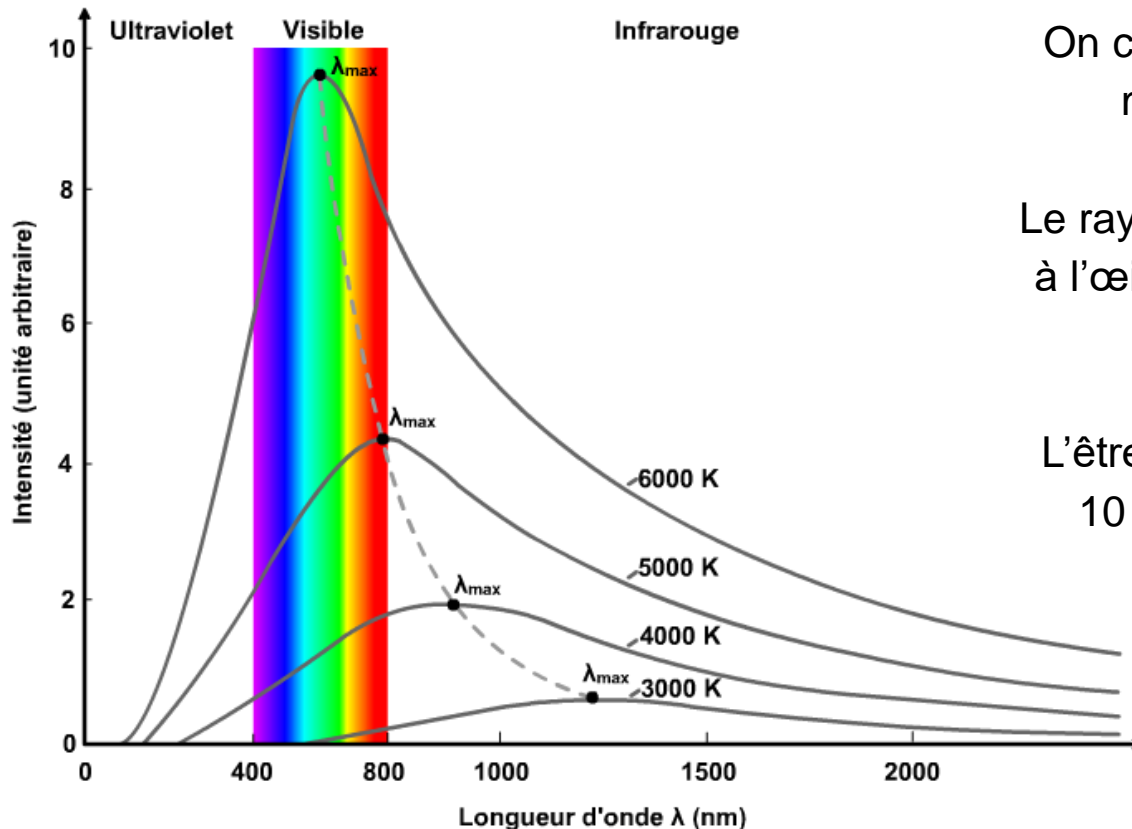
Loi de Planck (1900) : le résultat graphique



- Courbes dissymétriques.
- Pour chaque T , la courbe a un maximum atteinte pour une valeur λ_m (ou ν_m).
- Si $T_1 > T_2$ alors la courbe de T_1 est au-dessus de T_2 .
- Le comportement des courbes est similaire quelque soit T pour les grandes longueurs d'ondes (courtes fréquences).

5.3) Théorie du corps noir

Loi de Planck (1900) : le résultat graphique



$\lambda = 0,5.\lambda_{max}$ et $4,5.\lambda_{max}$ se nomme le spectre utile $\sim 98\%$.

On considère uniquement la valeur maximale du spectre à λ_m .

Le rayonnement thermique est visible à l'œil si T est compris entre 3500 K et 7200 K.

L'être humain a un λ_m de l'ordre de 10 μm : région des infrarouges.

5.3) Théorie du corps noir

Loi de Planck (1900) : calcul de l'émittance totale

$$M^0(T) = \int_0^{+\infty} M_\lambda^0(\lambda, T) d\lambda = \int_0^{+\infty} M_\nu^0(\nu, T) d\nu$$

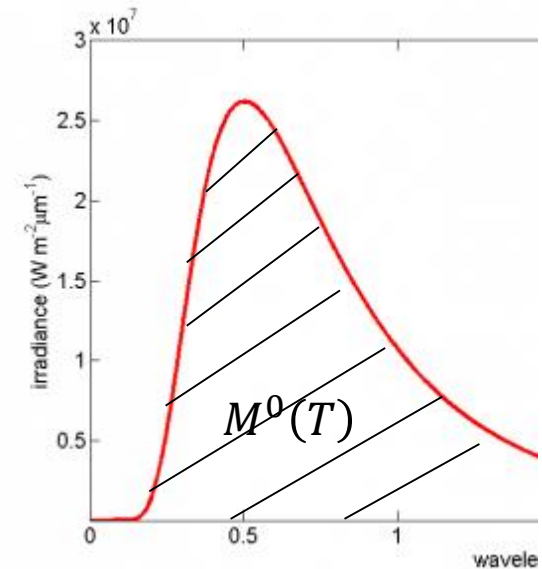
$$M^0(T) = \int_0^{+\infty} C_1' \nu^3 \cdot \frac{1}{\exp\left(C_2' \frac{\nu}{T}\right) - 1} d\nu$$

Changement de variable

$$M^0(T) = T^4 \cdot \frac{C_1'}{C_2'^4} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{\exp(x) - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$$

$$M^0(T) = \frac{2\pi^5 k_B}{15h^3 c^3} T^4$$

(voir loi de Stefan-Boltzmann)



5.3) Théorie du corps noir

Avec la théorie de Planck, on retrouve les lois empiriques formulées auparavant.
Exemple des lois de Wien (1880) :

- **1^{ère} loi de Wien ou loi de déplacement de Wien :**

M_{λ}^0 passe par un maximum pour une longueur d'onde λ_M qui ne dépend que de la température.

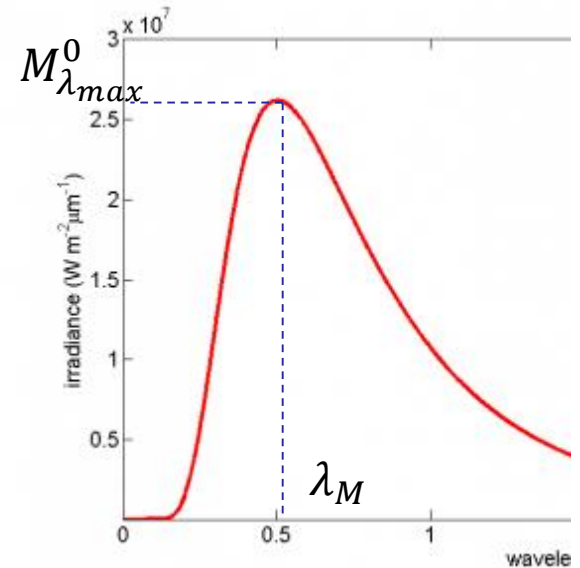
$$\lambda_M \cdot T \approx 2,898 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$$

- **2^{ème} loi de Wien :**

La valeur maximale de M_{λ}^0 est donnée par :

$$M_{\lambda_{max}}^0 \approx B \cdot T^5_M$$

avec $B = 1,28 \times 10^{-5} \text{ W} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{K}^{-5}$



5.3) Théorie du corps noir

Avec la théorie de Planck, on retrouve les lois empiriques formulées auparavant.

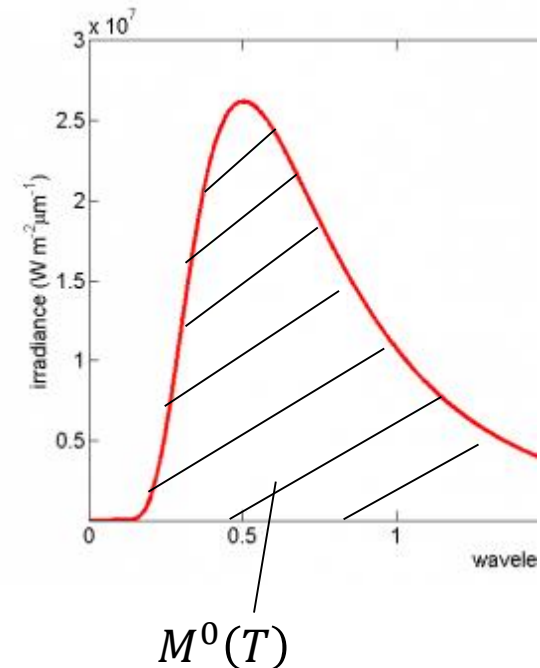
- **Loi de Stefan-Boltzmann (1879 & 1884) :**

L'émittance totale $M^0(T)$ est donnée par :

$$M^0(T) = \sigma \cdot T^4$$

avec la constante de Stefan-Boltzmann

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15h^3 c^3} \approx 5,670374 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$$



5.3) Théorie du corps noir

Avec la théorie de Planck, on retrouve les lois empiriques formulées auparavant.

- **Loi de Rayleigh-Jeans (1900) :**

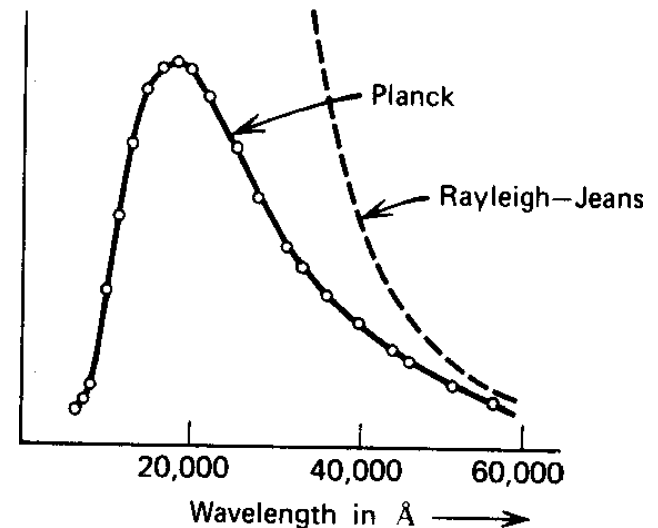
La courbe $M_{\lambda}^0(\lambda, T)$ peut s'approximer pour les grandes longueurs d'onde λ par la relation :

$$M_{\lambda}^0(\lambda, T) \approx C \cdot \frac{\lambda}{T^4}$$

avec $C = 2\pi \cdot c \cdot k_B \approx 2,60 \times 10^{-14} \text{ W.m.K}^{-1}$

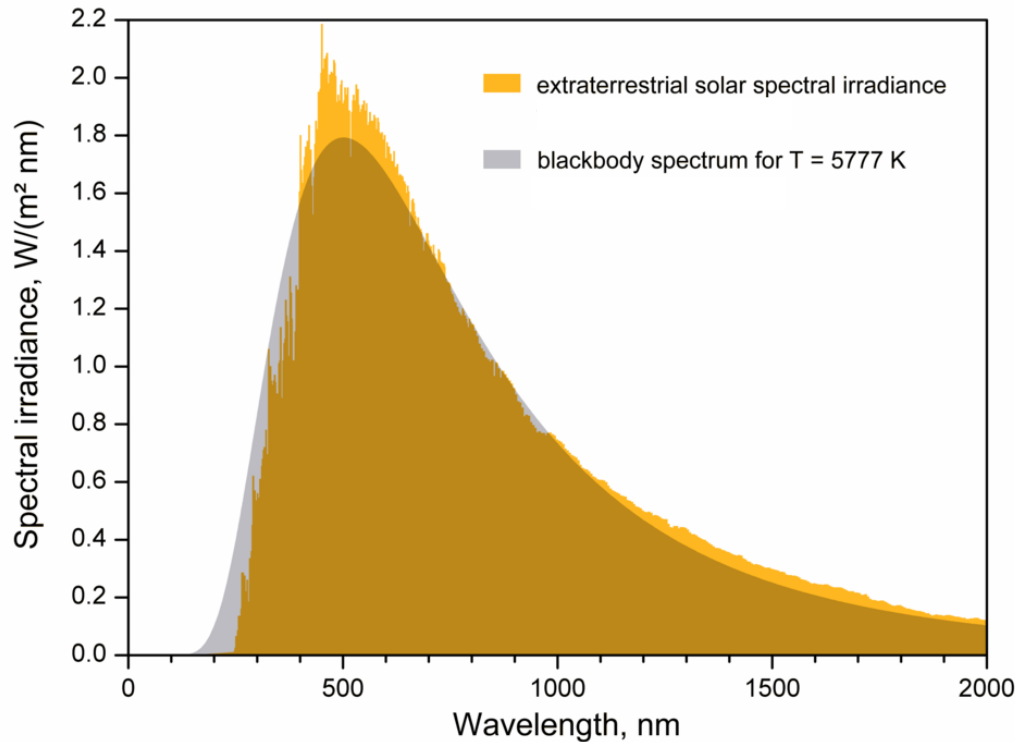
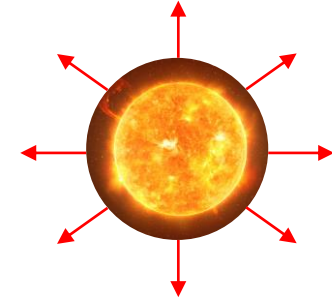
En réalité l'expression est valable quand $\frac{c_2}{\lambda T} \ll 1$.

Elle ne doit pas être appliquée pour les basses valeurs de λ sinon $M_{\lambda}^0(\lambda, T)$ tend vers l'infini (problème historiquement appelé « catastrophe ultraviolette »).



5.3) Théorie du corps noir

Exemple du **rayonnement solaire**

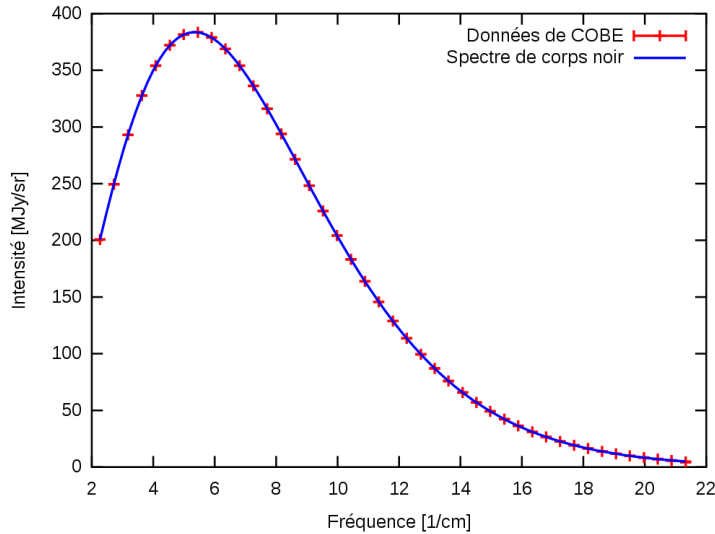


- Assimilable au corps noir avec température de surface : $T = 5777 \text{ K}$.
- Emission totale correspondante à la surface solaire : $M_T^0 = 63 \text{ MW} \cdot \text{m}^{-2}$
- Puissance totale émise par le Soleil (sphère de rayon $\approx 7 \cdot 10^5 \text{ km}$)
 $\Phi = M_T^0 \cdot 4\pi R^2 = 3,89 \cdot 10^{20} \text{ W}$

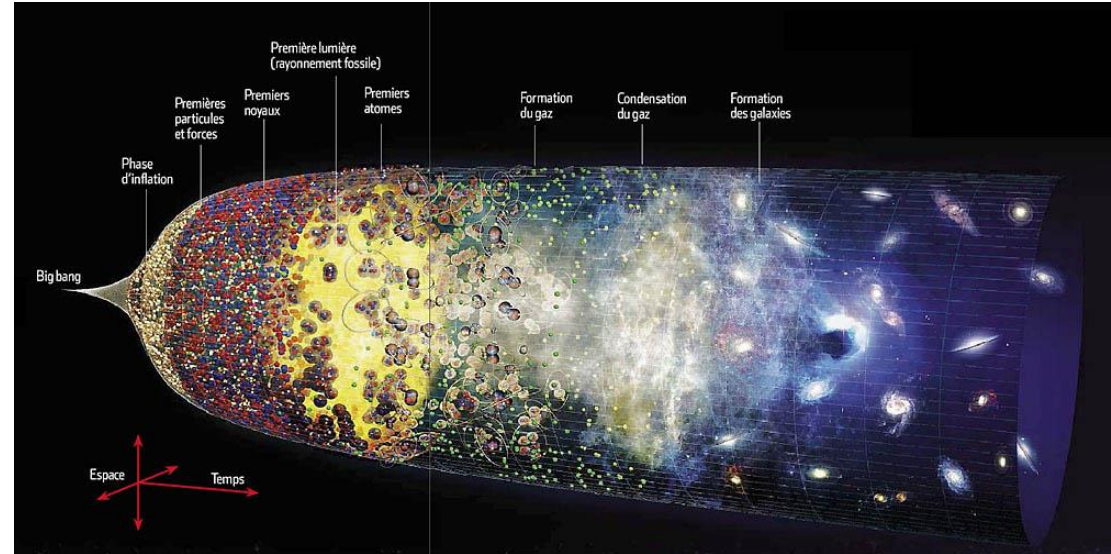
5.3) Théorie du corps noir

Exemple du **fond diffus cosmologique** (Cosmic Microwave Background ou CMB)

Spectre du fond diffus cosmologique (selon COBE)

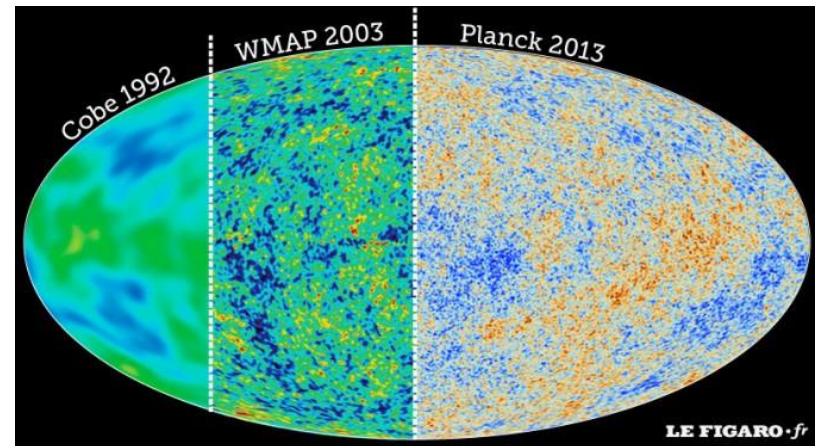


$$T_{\text{moyen}} = 2,72548 \pm 0,00057 \text{ K}$$



Inhomogénéité de T dans l'espace

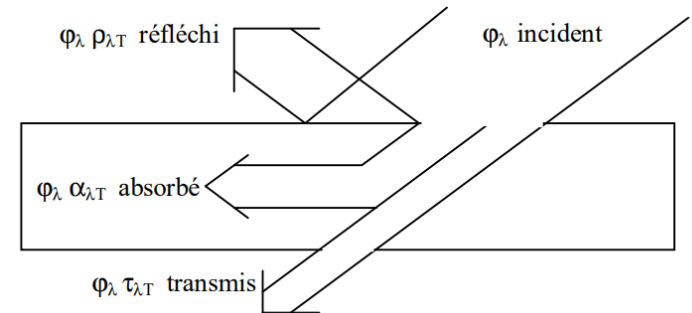
variation de l'ordre de 10^{-5} K



5.4) Corps NON noirs

Un corps réel diffère d'un corps noir de 3 façons :

- Les coefficients spectraux
- La distribution spectrale du rayonnement
- La distribution spatiale du rayonnement



L'émittance du corps réel est obtenu en corrigeant l'émittance du corps noir par un coefficient appelé **émissivité** et noté $\epsilon(\text{direction}, \lambda, T)$

$$M_\lambda(\text{direction}, \lambda, T) = \epsilon(\text{direction}, \lambda, T) \cdot M_\lambda^0(\lambda, T)$$

On peut distinguer 2 types de matériaux particuliers :

- Les **surfaces diffuses** : émissivité indépendant de la direction : $\epsilon(\lambda, T)$.
- Les **corps gris** : émissivité indépendant de la longueur d'onde et de la direction : $\epsilon(T)$.

5.4) Corps NON noirs

Valeurs d'émissivité ϵ pour quelques matériaux et en fonction de T

Metals			Nonmetals		
Surface	Temp. (°C)	ϵ	Surface	Temp. (°C)	ϵ
Aluminum			Asbestos	40	0.93-0.97
Polished, 98% pure	200-600	0.04-0.06	Brick		
Commercial sheet	90	0.09	Red, rough	40	0.93
Heavily oxidized	90-540	0.20-0.33	Silica	980	0.80-0.85
Brass			Fireclay	980	0.75
Highly polished	260	0.03	Ordinary refractory	1090	0.59
Dull plate	40-260	0.22	Magnesite refractory	980	0.38
Oxidized	40-260	0.46-0.56	White refractory	1090	0.29
Copper			Carbon		
Highly polished electrolytic	90	0.02	Filament	1040-1430	0.53
Slightly polished to dull	40	0.12-0.15	Lampsoot	40	0.95
Black oxidized	40	0.76	Concrete, rough	40	0.94
Gold: pure, polished	90-600	0.02-0.035	Glass		
Iron and steel			Smooth	40	0.94
Mild steel, polished	150-480	0.14-0.32	Quartz glass (2 mm)	260-540	0.96-0.66
Steel, polished	40-260	0.07-0.10	Pyrex	260-540	0.94-0.74
Sheet steel, rolled	40	0.66	Gypsum	40	0.80-0.90
Sheet steel, strong rough oxide	40	0.80	Ice	0	0.97-0.98
Cast iron, oxidized	40-260	0.57-0.66	Limestone	400-260	0.95-0.83
Iron, rusted	40	0.61-0.85	Marble	40	0.93-0.95
Wrought iron, smooth	40	0.35	Mica	40	0.75
Wrought iron, dull oxidized	20-360	0.94	Paints		
Stainless, polished	40	0.07-0.17	Black gloss	40	0.90
Stainless, after repeated heating	230-900	0.50-0.70	White paint	40	0.89-0.97
Lead			Lacquer	40	0.80-0.95
Polished	40-260	0.05-0.08	Various oil paints	40	0.92-0.96
Oxidized	40-200	0.63	Red lead	90	0.93
Mercury: pure, clean	40-90	0.10-0.12	Paper		
Platinum			White	40	0.95-0.98
Pure, polished plate	200-590	0.05-0.10	Other colors	40	0.92-0.94
Oxidized at 590°C	260-590	0.07-0.11	Roofing	40	0.91
Drawn wire and strips	40-1370	0.04-0.19	Plaster, rough lime	40-260	0.92
Silver	200	0.01-0.04	Quartz	100-1000	0.89-0.58
Tin	40-90	0.05	Rubber	40	0.86-0.94
Tungsten			Snow	10-20	0.82
Filament	540-1090	0.11-0.16	Water, thickness ≥ 0.1 mm	40	0.96
Filament	2760	0.39	Wood	40	0.80-0.90
			Oak, planed	20	0.90

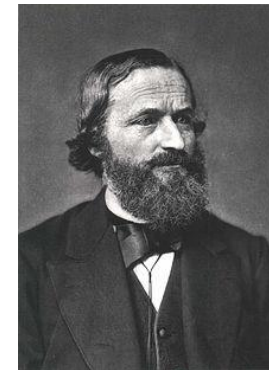
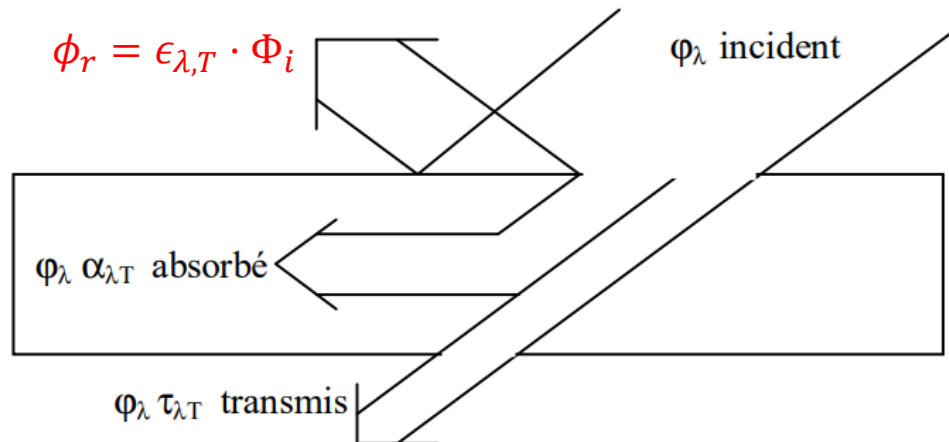
Ref: A Heat Transfer Textbook, John H. Leihnard IV, John H. Leihnard V

5.4) Corps NON noirs

Loi de Kirchhoff (1859) : relation entre le coefficient d'absorption et l'émissivité

À l'équilibre thermique, les flux d'émission et d'absorption sont égaux, pour chaque fréquence et dans chaque direction.

$$\alpha_{direction,\lambda,T} = \epsilon(direction,\lambda,T)$$



5.4) Corps NON noirs

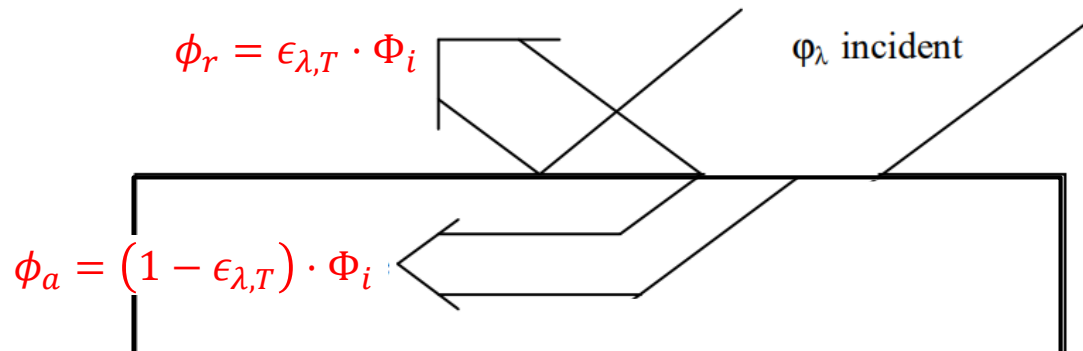
Loi de Kirchhoff (1859) : relation entre le coefficient d'absorption et l'émissivité

À l'équilibre thermique, les flux d'émission et d'absorption sont, pour chaque fréquence et dans chaque direction.

$$\alpha_{direction,\lambda,T} = \epsilon(direction,\lambda,T)$$

Cas d'un corps opaque :

le problème est complètement déterminé par la donnée de l'émissivité.



5.4) Corps NON noirs

Application : utilisation d'une caméra thermique et interprétation des clichés



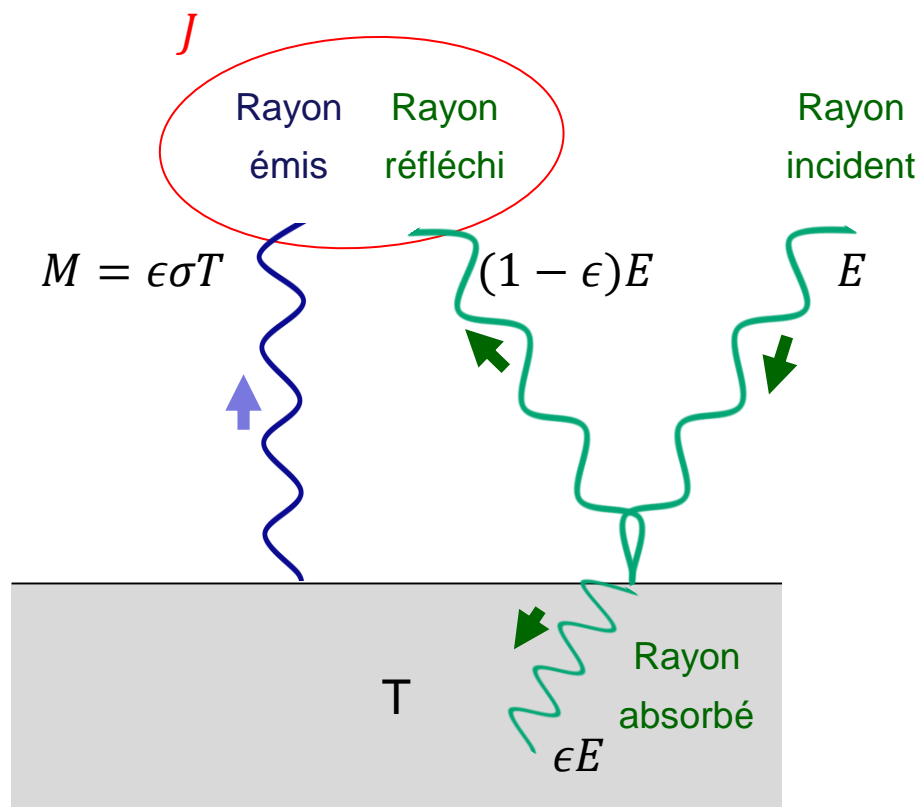
L'émissivité globale

ϵ_g est un paramètre de la caméra.



- Les couleurs du clichés informent sur les « **températures apparentes** » des objets car une seule et unique émissivité est renseignée.
- Les « **températures réelles** » peuvent être obtenues après une correction manuelle du cliché qui tient compte de l'émissivité des différents objets présents sur la photo.

5.5) Corps en influence partielle



Hypothèses :

- corps gris et opaque
- éclairage incident homogène

Notion de radiosité :

émittance apparente de la surface c'est-à-dire le rayonnement propre du corps et le rayon réfléchi

$$J = \epsilon\sigma T + (1 - \epsilon)E$$

Flux d'énergie perdue par le corps :

$$\phi_{perdue} = J - E = \epsilon\sigma T - \epsilon E$$

5.5) Corps en influence partielle

Application : utilisation d'une caméra thermique et interprétation des clichés



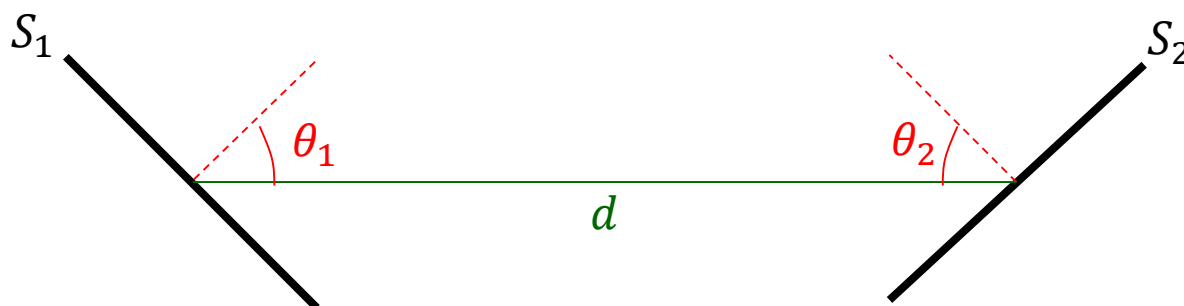
L'émissivité globale
 ϵ_g est un paramètre
de la caméra.



- La caméra mesure la radiosité et pas seulement le rayonnement émis par le corps.
- Il faut éviter les influences extérieures. Par exemple : éviter la lumière du Soleil ou source de lumière artificielle.

5.5) Corps en influence partielle

Cas simple : 2 surfaces



Flux émis par S_1 et reçu par S_2 :

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = F_{1 \rightarrow 2} \cdot \epsilon_1 \cdot \Phi_1^0 \quad \text{avec}$$

Flux émis par S_2 et reçu par S_1 :

$$\Phi_{2 \rightarrow 1} = F_{2 \rightarrow 1} \cdot \epsilon_2 \cdot \Phi_2^0 \quad \text{avec}$$

$$F_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{S_1} \int_{S_1} \int_{S_2} \frac{dS_1 dS_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi d^2}$$

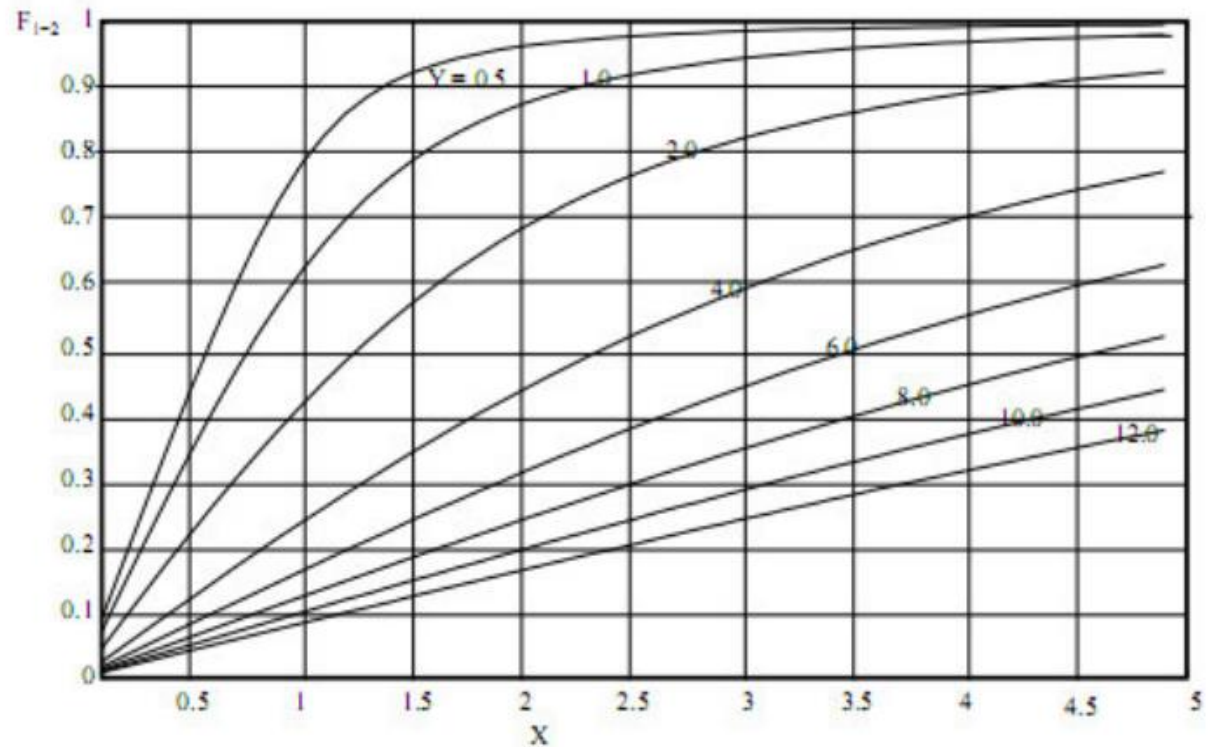
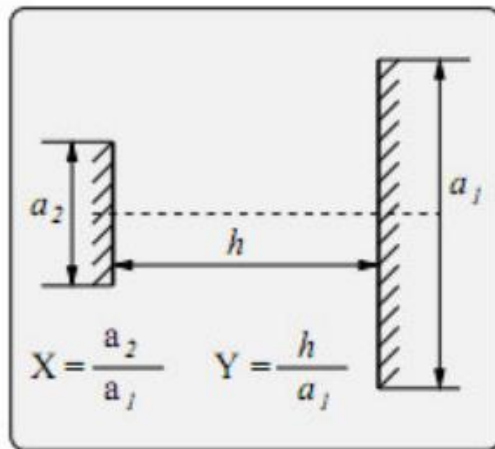
$$F_{2 \rightarrow 1} = \frac{1}{S_2} \int_{S_1} \int_{S_2} \frac{dS_1 dS_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi d^2}$$

- Correspond à la fraction du rayonnement émis par S_i et reçu par S_2 .
- Dépend uniquement de la géométrie.

Facteur de formes

5.5) Corps en influence partielle

Facteurs de forme

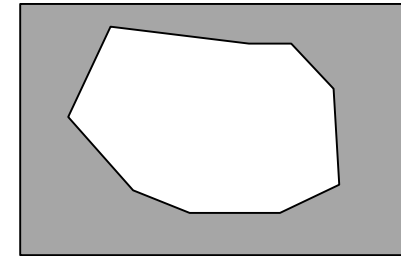


Voir la littérature pour les facteurs de forme selon la géométrie des corps.

5.5) Corps en influence partielle

Généralisation à une cavité fermée avec n surfaces

Les n surfaces notées S_i peut s'influencer l'une l'autre.
Une surface peut s'influencer elle-même si elle est concave.



- Le flux apparent de la surface S_i peut se décomposer de la manière suivante :

$$\phi_{i \rightarrow j} = F_{i \rightarrow j} \cdot \epsilon_i \cdot \phi_{i \rightarrow j}^0 \quad \text{avec} \quad F_{i \rightarrow j} = \frac{1}{S_i} \int_{S_i} \int_{S_j} \frac{dS_i dS_j \cos \theta_i \cos \theta_j}{\pi d_{ij}^2}$$

- Radiosité de la surface S_i : $J_i = F_{i \rightarrow j} \cdot \epsilon_i \cdot \phi_{i \rightarrow j}^0$

- Flux d'énergie perdue par le corps S_i :

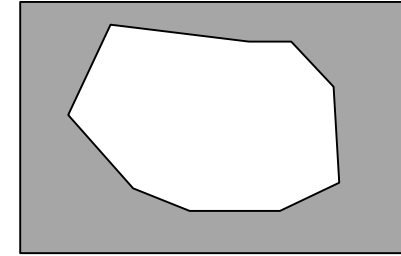
$$\phi_{p_i} = J_i - E_i = J_i - \sum_{j=1}^n F_{ij} J_k$$

Analogie électrique existe pour calculer l'influence de n corps en influence.

5.5) Corps en influence partielle

Généralisation à une cavité fermée avec n surfaces

Les n surfaces notées S_i peut s'influencer l'une l'autre.
Une surface peut s'influencer elle-même si elle est concave.

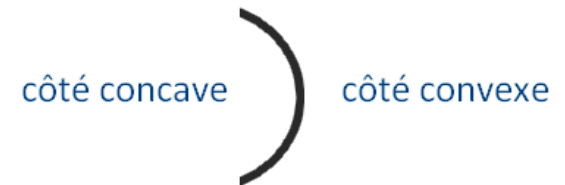


Il y a n^2 facteurs de forme qui obéissent aux relations suivantes :

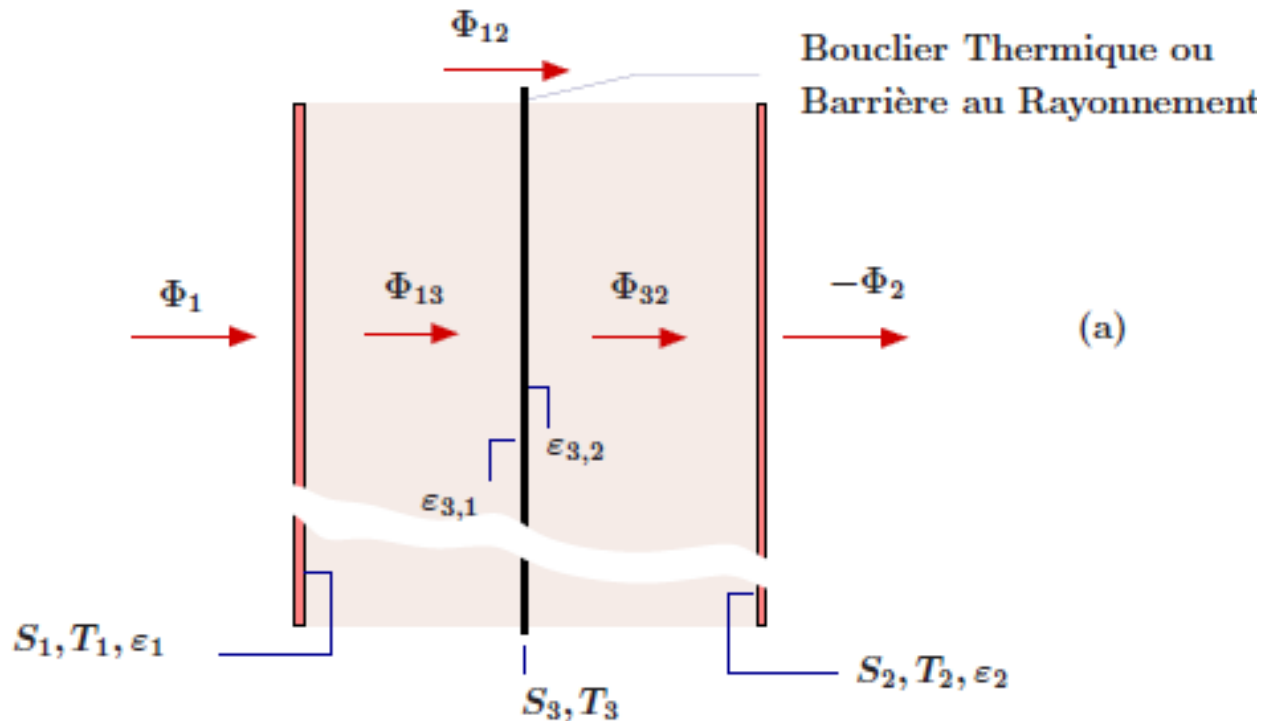
- relation de réciprocité : $S_i F_{ik} = S_k F_{ki}$

- relation d'additivité : $\sum_{j=1}^n F_{ij} = 1$

- si la surface S_i est concave alors $F_{ii} \neq 0$
si la surface S_i est convexe ou plane alors $F_{ii} = 0$



5.5) Corps en influence partielle

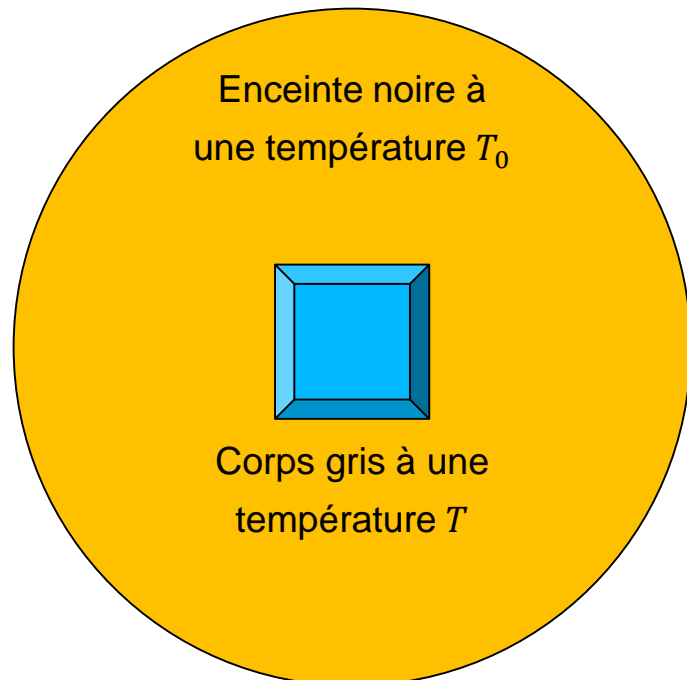


La surface intermédiaire permet de réduire le flux net échangé par les surfaces extrêmes.
 + l'émissivité de l'écran est petite, + le pouvoir de réduction sera grand.

5.6) Résistance thermique de rayonnement ?

Est-il possible de définir une résistance thermique de rayonnement ? $\Phi = 1/R_{th} \cdot \Delta T$

→ Non car la théorie n'est pas linéaire. MAIS dans certaines approximations ça marche.



- Flux reçu : $\Phi = \Phi_{émis} - \Phi_{absorbé}$
- Théorie du corps gris : $\Phi = S \cdot \sigma \cdot \epsilon \cdot (T^4 - T_0^4)$
- Approximation : différence de T très faible
On pose $T = T_0 + \Delta T$ avec $\Delta T = T - T_0$
et on suppose ΔT petit

$$\rightarrow \Phi \approx S \cdot \sigma \cdot \epsilon \cdot 4T_0^3 \cdot \Delta T$$

$$\rightarrow R_{th} = \frac{1}{4 \cdot S \cdot \sigma \cdot \epsilon \cdot T_0^3}$$

Ce qu'il faut retenir

- **Modèle du corps noir**
 - Hypothèse : le rayonnement est un phénomène de surface.
 - Modèle de référence valable pour un corps totalement absorbant
 - La loi de Planck : flux en fonction de la longueur d'onde λ et de la température T .
- **Cas réel**
 - Modèle théorique doit être corrigé par l'émissivité ϵ du corps qui peut dépendre entre autres de λ et T .
 - Loi de Kirchhoff : émissivité ϵ = coefficient d'absorption α
- **Influence partielle des corps :**
 - Un corps n'est jamais isolé : il y a échange de rayonnement entre plusieurs corps.
 - Le problème peut revenir à un calcul de facteurs de forme.
- **Sujet non traité : rayonnement des gaz :** phénomène surfacique \rightarrow volumique

- **3 modes de transfert thermique** : conduction, convection et rayonnement.
En pratique : toujours une combinaison de plusieurs modes (ex : conduction + convection)
- **Propriétés des corps qui ont un impact sur le transfert thermique** :
 - Conduction : la conductivité λ , diffusivité a et de l'effusivité E qui sont mesurables.
 - Convection : le coefficient de convection surfacique h qui est calculable à l'aide de corrélations expérimentales entre les nombres adimensionnels.
 - Rayonnement : l'émissivité du corps qui est mesurable.
- **Méthode des résistances thermiques** valables surtout pour la conduction + convection.
- **Attention au rayonnement** : influence partielle des corps
- **Application : les échangeurs de chaleur**
 - Modes prédominants : la conduction et convection.
 - Dimensionnement peut être réalisé par méthodes DTLM et NUT.
 - Rôle des ailettes..

Annexes

5.3) Théorie du corps noir

Calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{\exp(x) - 1} dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^3 \cdot \exp(-x)}{1 - \exp(-x)} dx$

- Etude de la suite : $u_n = \exp(nx) = (\exp(x))^n$
Il s'agit d'une suite géométrique de raison $\exp(x)$.
La somme : $\sum u_n =$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \exp(-nx) = \frac{\exp(-x)}{1 - \exp(-x)}$$

- Calcul de l'intégrale par IPP successives :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{\exp(x) - 1} dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} x^3 \cdot \exp(-nx) dx \\ &= + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n} \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \exp(-nx) dx = + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^2} \int_0^{+\infty} x \cdot \exp(-nx) dx \\ &= + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^3} \int_0^{+\infty} \exp(-nx) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^4} \end{aligned}$$

5.3) Théorie du corps noir

Calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{\exp(x) - 1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^4}$

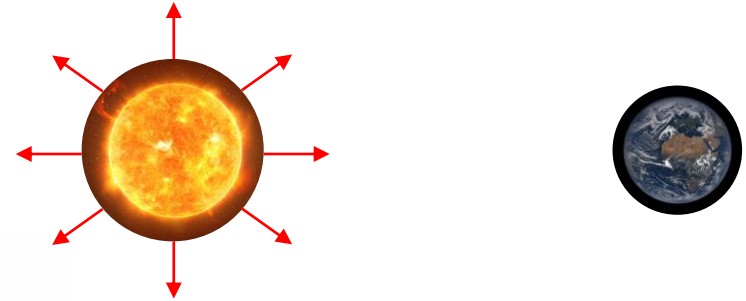
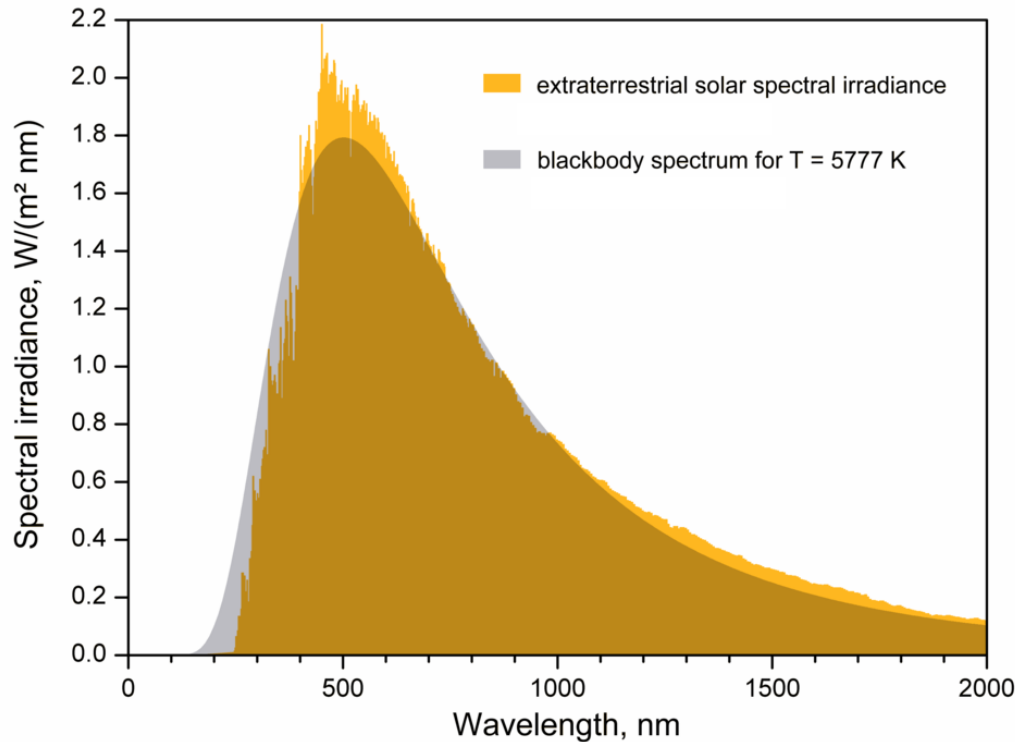
- Décomposition en série de Fourier de $f(x) = x^2$ rendu périodique sur $[-\pi, +\pi]$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

- Résultat final : $\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{\exp(x) - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$

5.3) Théorie du corps noir

Exemple du **rayonnement solaire**



- **Constante solaire E_0** :
puissance reçue par 1 m^2 sur Terre
(sphère de rayon $(150 \cdot 10^6 \text{ km})$ sans
atmosphère) pendant 1 s :

$$E_0 = 1360 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

- Fraction reçue sur Terre :

$$\frac{E_0}{4} = 340 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

Echangeur de chaleur co-courant / contre-courant

$$\left\{ \begin{array}{l} d\Phi = k(T_c - T_f)dS \quad (1) \\ d\Phi = \dot{m}_c C_{pc} dT_c \quad (2) \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad \dot{m}_c C_{pc} dT_c = k(T_c - T_f)dS \quad \rightarrow \quad \frac{dT_c}{T_c - T_f} = \frac{k}{\dot{m}_c C_{pc}} dS$$

or $(3') \quad \dot{m}_c C_{pc}(T_{cs} - T_c) = \dot{m}_f C_{pf}(T_{fs} - T_f) \quad \rightarrow \quad T_f = \frac{\dot{m}_c C_{pc}}{\dot{m}_f C_{pf}}(T_c - T_{cs}) + T_{fs}$

donc $\frac{dT_c}{T_c - T_f} = \frac{k}{\dot{m}_c C_{pc}} dS$ devient $\frac{dT_c}{T_c - \frac{\dot{m}_c C_{pc}}{\dot{m}_f C_{pf}}(T_c - T_{cs}) + T_{fs}} = \frac{k}{\dot{m}_c C_{pc}} dS$